

Limit

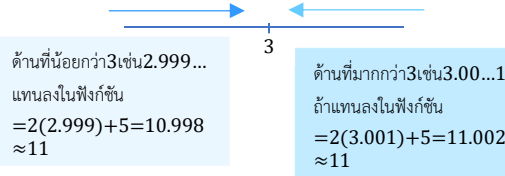
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: เรียกว่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a มากๆ

ทฤษฎี

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$; c เป็นค่าคงที่
- $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{m/n} = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^{m/n}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

วิธีการหาค่า $\lim$ ฟังก์ชันทั่วไป

$\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 5$ ค่าที่เข้าใกล้ 3 จะมี 2 ด้านคือ



สรุป จากตัวอย่างทั้งสองด้านจะมีค่าประมาณ = **แทน 3 ลงไปในสมการตรงๆ** ได้เลย

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 5 = 2(3) + 5 = 11$$

วิธีการหาค่า $\lim$ ฟังก์ชัน เมื่อแทนค่าแล้วได้เป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0 = 0^0, 1^\infty, \infty^0$

- จัดรูป เช่น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = 4$
- conjugate ใช้กับสมการตรรกฐาน เช่น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + 2}{x(x-1)(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x-1)(4)} = \frac{-1}{4}$$

สูตรที่เกี่ยวข้อง $(n-l)(n+l) = n^2 - l^2$ || $(n \pm l)(n^2 \pm nl + l^2) = n^3 \pm l^3$

- ลอปิตาล

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$
$0 \cdot \infty, \infty - \infty$	เปลี่ยนสมการให้เป็น $\frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ สามารถหาค่า $f(x), g(x)$ ได้แล้ว $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$
$0^0, 1^\infty, \infty^0$	1. $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x) g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ 2. หา $\lim$ ยกกำลัง โดยใช้วิธี $0 \cdot \infty$ แล้ว เอา e มายกกำลังด้วยคำตอบที่ได้	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = 1^\infty$ $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x) g(x)}$ $e^{\ln f(x) g(x)} = \exp\left[\ln \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x\right]$ คิดที่ยกกำลัง $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right)$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{3}{x})}{1/x}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-3/x^2)(\frac{x}{x+3})}{-1/x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+3} = 3$ คำตอบ e^3

วิธีการหาค่า $\lim$ ฟังก์ชันที่จำเป็นต้องแยกช่วง

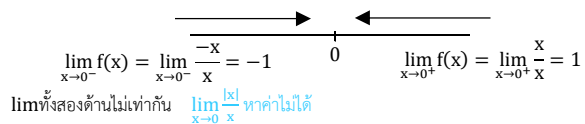
หาคำด้วยการเช็ค $\lim$ ทั้ง 2 ด้านของฟังก์ชันนั้น

โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} x > a$ เรียกว่า $\lim x$ เข้าใกล้ a ทางบวก

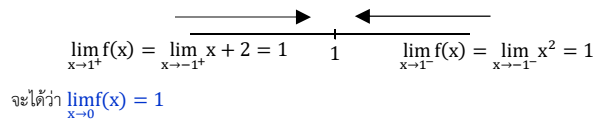
$\lim_{x \rightarrow a} x < a$ เรียกว่า $\lim x$ เข้าใกล้ a ทางลบ

ถ้า $\lim$ ทั้งสองด้าน **ไม่เท่ากัน** เราจะบอกว่า **หาค่าไม่ได้**
ถ้า $\lim$ ทั้งสองด้าน **เท่ากัน** $\lim$ เท่ากับค่านั้น

★ ตัวอย่าง 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & ; x > 0 \\ \frac{-x}{x} & ; x < 0 \end{cases}$



★ ตัวอย่าง 2 $F(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq -1 \\ x^2 & ; x < -1 \end{cases}$



ค่า $\lim$ ที่ควรรู้

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$	

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่จุดหนึ่ง

ฟังก์ชันจะต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อมีทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้

- $f(a)$ หาค่าได้
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
- $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

	ต่อเนื่อง	ไม่ต่อเนื่อง
	$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq -1 \\ x^2 & ; x < -1 \end{cases}$	ไม่มี 1 ข้อ ไม่ต่อเนื่องเลย
1. $f(a)$ หาค่าได้	$f(-1) = 1$	$f(x) = \frac{ x }{x}$ $f(0)$ หาค่าไม่ได้ ที่ $x = 0$ ไม่ต่อเนื่อง
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้	1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 = 1$ 2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 2 = 1$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$	$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ x^2 & ; x < 1 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 2 = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$
3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=1$	$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x > -1 \\ x^2 & ; x < -1 \\ 3 & ; x = -1 \end{cases}$ $f(-1) = 3, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บนช่วงปิด $[a, b]$

- เช็คความต่อเนื่อง บนช่วง (a, b)
- เช็คความต่อเนื่องที่ $x=a$
- เช็คความต่อเนื่องที่ $x=b$

ตรวจสอบ $\lim$ อนันต์

ต้องการแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, -\infty$ ทำได้ด้วยการ เช็คค่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ ไหม

เท่ากับ 0 $\Rightarrow$ $f(x) > 0; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
 $\Rightarrow$ $f(x) < 0; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

★ ตัวอย่าง $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2 - 1}$ เมื่อเป็น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2 + \sqrt{x}} = 0$ ไหม

เมื่อลองแทน 1 ทางลบ เช่น 0.99 พบว่าสมการ $f(x) < 0$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

ทฤษฎี Sandwich

เมื่อ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ด้วย

★ ตัวอย่าง $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$
 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$
 $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$

$\Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

Diff

คือ ความชันของฟังก์ชัน ณ จุดหนึ่ง ซึ่งก็คือ $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

การหาค่าอนุพันธ์

1. จากนิยามข้างต้น

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4 \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2+4]-[x^2+4]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^2+2xh+h^2+4]-[x^2+4]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x \end{aligned}$$

2. สูตรการหาอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= nx^{n-1} \\ f(x) &= x^2 + 4 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

อนุพันธ์จะมีค่าเมื่อ

$$\text{อนุพันธ์ทางซ้าย} = \text{อนุพันธ์ทางขวา}$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

★ ตัวอย่าง $f(x) = \begin{cases} 1+x^2; x \leq 1 \\ 3-x^3; x > 1 \end{cases}$

$$\text{อนุพันธ์ทางซ้าย} \neq \text{อนุพันธ์ทางขวา} \Rightarrow \text{ไม่มีอนุพันธ์ที่ } x=1$$

$$f'(1^-) = 2 \quad f'(1^+) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \text{ความต่อเนื่องที่ } x=1$$

ถ้า $f'(a)$ มีค่าแล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x=a$

กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

$$\frac{d}{dx} [g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

อนุพันธ์อันดับสูง

คือ การหาอนุพันธ์ที่มากกว่า 1 ครั้ง

อนุพันธ์อันดับที่สอง (second derivative) $\Rightarrow f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$

อนุพันธ์อันดับที่ $n \Rightarrow f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$

★ ตัวอย่าง $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง} \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่สอง} \quad f''(x) = 6x - 4$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่สาม} \quad f^{(3)}(x) = 6$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่ } n \quad f^{(n)}(x) = 6$$

อนุพันธ์โดยปริยาย (implicit differentiation)

★ ตัวอย่าง

$$x^2 + y^4 = 1$$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^4}{dx} = \frac{d1}{dx}$$

$$2x + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{4y^3}$$

สูตรการหาอนุพันธ์

1. สูตรทั่วไป

$$1. \frac{dC}{dx} = 0$$

$$2. \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$3. \frac{d}{dx} Cx = C \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \quad \text{กระจายผ่าน + / - ได้}$$

$$5. \frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \text{วิธีทอง}$$

$$6. \frac{d(\frac{u}{v})}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$7. \frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{d(\frac{du}{dx})}{dx} = \text{หน้า} \frac{d^2u}{dx^2} + \text{หลัง} \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d(\frac{du}{dx})}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx}}{\frac{du}{dx}^2}$$

2. สูตรเลขยกกำลัง

$$1. \frac{d e^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$2. \frac{d a^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

3. สูตรตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned} 1. \frac{d}{dx} \sin u &= \cos u \frac{du}{dx} \\ 2. \frac{d}{dx} \cos u &= -\sin u \frac{du}{dx} \\ 3. \frac{d}{dx} \tan u &= \sec^2 u \frac{du}{dx} \\ 4. \frac{d}{dx} \cot u &= -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx} \\ 5. \frac{d}{dx} \sec u &= \sec u \tan u \frac{du}{dx} \\ 6. \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u &= -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

4. สูตรตรีโกณมิติผกผัน arc...

$$\begin{aligned} 1. \frac{d}{dx} \arcsin u &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\ 2. \frac{d}{dx} \arccos u &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\ 3. \frac{d}{dx} \arctan u &= \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ 4. \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u &= -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ 5. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u &= \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \\ 6. \frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} u &= -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

อนุพันธ์ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

★ ตัวอย่าง 1 $f(x) = 2^{\sec(\ln|4x|)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{\sec(\ln|4x|)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{d \sec(\ln|4x|)}{dx} \\ &= 2^{\sec(\ln|4x|)} \cdot \ln 2 \cdot \sec(\ln|4x|) \tan(\ln|4x|) \cdot \frac{d|\ln|4x||}{dx} \\ &= 2^{\sec(\ln|4x|)} \cdot \ln 2 \cdot \sec(\ln|4x|) \tan(\ln|4x|) \cdot 4 \end{aligned}$$

★ ตัวอย่าง 2 $f(x) = \log_5(\arcsin 2x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{5 \ln(\arcsin 2x)} \cdot \frac{d(\arcsin 2x)}{dx} \\ &= \frac{1}{5 \ln(\arcsin 2x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot \frac{d(2x)}{dx} \\ &= \frac{1}{5 \ln(\arcsin 2x)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \end{aligned}$$

การหาอนุพันธ์โดยใช้ ln (logarithmic differentiation)

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

★ ตัวอย่าง $f(x) = (2x+1)^{x^2}$

$$f(x) = e^{x^2 \ln(2x+1)}$$

พิจารณา $x^2 \ln(2x+1)$

$$\frac{d}{dx} x^2 \ln(2x+1) = x^2 \cdot \frac{2}{2x+1} + 2x \ln(2x+1)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad f'(x) = e^{x^2 \ln(2x+1)} \cdot [x^2 \cdot \frac{2}{2x+1} + 2x \ln(2x+1)]$$

อนุพันธ์ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$$\text{ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกคือ} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ทฤษฎี

$$1. \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$2. \cosh(-x) = \cosh x$$

$$3. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$4. 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$5. \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$6. \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$7. \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

การหาอนุพันธ์

$$1. \frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx} \sec u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

$$2. \frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

★ ตัวอย่าง

$$f(x) = x \sinh \sqrt{x}$$

$$f'(x) = x \cosh \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sinh \sqrt{x}$$

ค่าเชิงอนุพันธ์

$$dy = df = f'(x)dx$$

★ตัวอย่าง 1

$$d(x^2 + \sin(2x - 1)) = [2x + 2 \cos(2x - 1)]dx$$

★ตัวอย่าง 2

หา dy เมื่อกำหนดให้ $y = 2x - \sqrt{x}$ และ x เพิ่มขึ้นจาก 4 ถึง 4.02

$$dy = [2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}]dx$$

$$dy = (2 - \frac{1}{2\sqrt{4}})(0.02)$$

$$dy = (\frac{7}{4})(0.02) = 0.035$$

ค่าผิดพลาดโดยประมาณของ f

$$\text{ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ } y = \frac{dy}{y} = \frac{f'(x_0)dx}{y_0}$$

$$\text{ร้อยละของค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ } y = \frac{dy}{y} \times 100$$

★ตัวอย่าง เมื่อวัดด้านของลูกบาศก์ลูกหนึ่งซึ่งยาว 25 เซนติเมตร พบว่าวัดผิดพลาดไปด้านละไม่เกิน 0.04 เซนติเมตร จงหาค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ และ ร้อยละของค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ของการหาปริมาตรนี้

ให้ ปริมาตรของลูกบาศก์ $(V) = x^3$

$$\text{จะได้ว่า } dv = v'(x)\Delta x$$

$$dv = 3x^2\Delta x$$

จากโจทย์ $x=25$ เซนติเมตร และ $\Delta x \leq 0.04$ เซนติเมตร

$$\text{ดังนั้น } dv \leq 3(25)^2(0.04) = 75 \quad \leftarrow \text{ค่าผิดพลาด}$$

$$\text{ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์} = \frac{dv}{V} = \frac{75}{25^3} = 0.0048$$

$$\text{ร้อยละของค่าผิดพลาดสัมพัทธ์} = 0.48$$

อัตราสัมพัทธ์

คือ การเปลี่ยนแปลงของปริมาณหรือตัวแปร ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับเวลา

★ตัวอย่าง

ถ้าความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว

6 m/s จงหาว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อความยาวด้านเท่ากับ

$$3\sqrt{3} \text{ m}$$

- ① กำหนดตัวแปร: x คือความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $= 3\sqrt{3} \text{ m}$
 y คือความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $= 3x$
 z คือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$
 อัตราเร็ว 6 m/s $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 6$

$$\text{② หา } \frac{dz}{dt}$$

หา dz/dt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3}x$$

$$\text{ดังนั้นที่ } x = 3\sqrt{3} \text{ m} \quad \frac{dz}{dt} = 9$$

ฟังก์ชันเพิ่ม/ลด

ฟังก์ชันเพิ่ม/ลด พิจารณาจาก $f'(x)$ = ความชันของเส้นโค้งที่จุดนั้นๆ

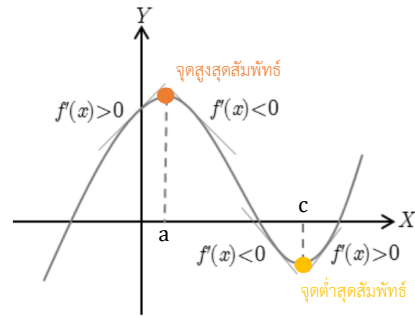


จุดวิกฤต (critical point)

จุดที่ความชันเป็นศูนย์

ที่ $f'(c) = 0 \Rightarrow c$ เป็นจุดวิกฤต (critical point)

สูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) | ต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum)



สูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum)

$f'(x)$ เปลี่ยนจาก + เป็น - ที่ $x = a$

f มี จุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = a$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = $f(a)$

ต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum)

$f'(x)$ เปลี่ยนจาก - เป็น + ที่ $x = c$

f มี จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = c$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = $f(c)$

★ตัวอย่าง

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

$$\text{① หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน } f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$\text{② หาจุดวิกฤต แทน } f'(x) = 0$$

$$0 = 12x^3 - 12x^2$$

$$0 = 12x^2(x - 1)$$

$$x=0, x=1$$

จุดวิกฤต

$$\text{③ วาดเส้นจำนวน}$$



$$\text{④ เช็คว่าช่วงไหนเป็นฟังก์ชันเพิ่ม/ลด : แทนตัวเลขในช่วงนั้นใน } f'(x)$$

ช่วง 1: $x < 0$ อาจแทน -1 จะได้

$$f'(-1) = 12(-1)^3 - 12(-1)^2 = -24 \Rightarrow \text{ฟังก์ชันลด (-)}$$

ช่วง 2: $0 < x < 1$ อาจแทน 0.5 จะได้

$$f'(0.5) = 12(0.5)^3 - 12(0.5)^2 = -1.5 \Rightarrow \text{ฟังก์ชันลด (-)}$$

ช่วง 3: $x > 1$ อาจแทน 2 จะได้

$$f'(2) = 12(2)^3 - 12(2)^2 = 48 \Rightarrow \text{ฟังก์ชันเพิ่ม (+)}$$

เส้นจำนวนที่วาดได้



$$\text{⑤ วาดกราฟลงไป}$$

จะเห็นว่า $x = 1$ เป็นหลุม ดังนั้นมีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์อยู่ที่ $x = 1$

และไม่มียอดเขา จึงไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์

$$\text{⑥ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ } f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 = -1$$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์/ต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute extreme value)

คือ ค่าที่สูงที่สุด/ต่ำที่สุดในช่วงหนึ่ง เช่นพิจารณาในช่วง $[a, b]$

$$\text{★ตัวอย่าง } f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5 \quad \text{บน } [-1, 2]$$

$$\text{① หาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ /ต่ำสุดสัมบูรณ์}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

$$0 = -3x^2 + 12x$$

$$0 = 3x(-x + 4)$$

$$x = 0, 4$$

สูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 4$ พิจารณาในช่วง $[-1, 2]$

ต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0 \quad f(0) = -5$

$$\text{② พิจารณาขอบ โดยดูจากเส้นจำนวนที่เราวาด}$$

ขอบ $x = -1$ และ $x = 2$ จะมีค่า y มากกว่าที่ $x = 0$ ดังนั้นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์อยู่ที่ $x = 0$ คือ -5

ส่วนจุดสูงสุดสัมบูรณ์ให้ลองเช็คที่ขอบ $f(-1) = 2$

$$f(2) = 11 \Rightarrow \text{ค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ } 11$$

ความเว้าขึ้น (concave upward)/ความเว้าลง (concave downward)

ความเว้าขึ้น	ความเว้าลง
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$

จุดเปลี่ยนเว้า

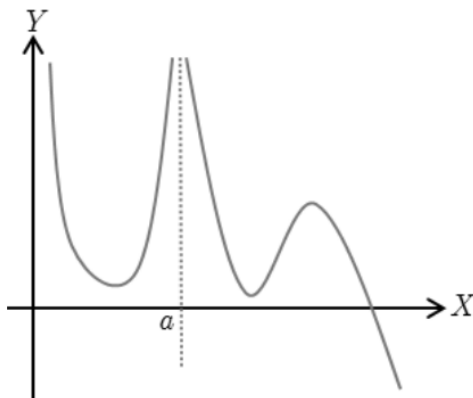
คือ จุดที่ $f''(c) = 0$ เรียก c ว่าจุดเปลี่ยนเว้า

	ความเว้าขึ้น $f''(x) > 0$	ความเว้าลง $f''(x) < 0$
ฟังก์ชันเพิ่ม $f'(x) > 0$	เพิ่ม, เว้าขึ้น $f' > 0, f'' > 0$	เพิ่ม, เว้าลง $f' > 0, f'' < 0$
ฟังก์ชันลด $f'(x) < 0$	ลด, เว้าขึ้น $f' < 0, f'' > 0$	ลด, เว้าลง $f' < 0, f'' < 0$

เส้นกำกับ

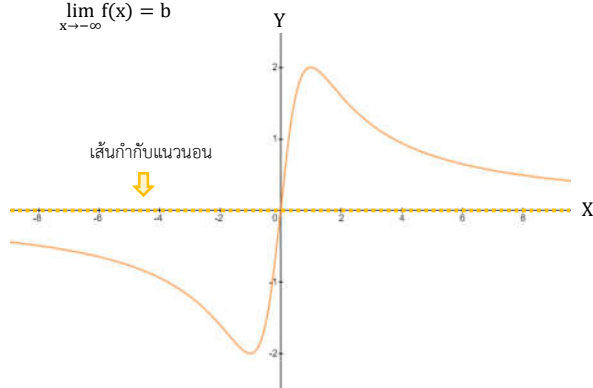
1) เส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptote) ที่ $x=a$

เมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, -\infty$



2) เส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptote) ที่ $x=b$

เมื่อ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$



การร่างกราฟของเส้นโค้ง

★ ตัวอย่าง $f(x) = x(x-4)^3$

1) หาจุดตัดแกน

จุดตัดแกน x (แทน $y=0$) : $x=0, 4$

จุดตัดแกน y (แทน $x=0$) : $y=0$

2) หาเส้นกำกับ

เส้นกำกับแนวตั้ง : ดูว่ามีจุดไหนที่ทำให้สมการเข้าใกล้ $\infty, -\infty$ บ้าง

เส้นกำกับแนวนอน : หา $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ กับ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

สมการนี้ไม่มีทั้งเส้นกำกับแนวตั้งและแนวนอน

3) จุดวิกฤติ ($f'(x)=0$)

$$f'(x) = 3x(x-4)^2 + (x-4)^3$$

$$f'(x) = (x-4)^2(3x+x-4)$$

$$f'(x) = (x-4)^2(4x-4)$$

$$0 = (x-4)^2(4x-4)$$

$$x = 1, 4$$

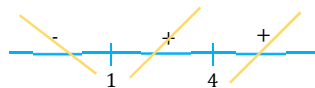
4) หาฟังก์ชันเพิ่ม/ลด และค่าสูงสุดสัมพัทธ์

4.1) จาก $f'(x) = (x-4)^2(4x-4)$ จะวาดเส้นจำนวน

4.2) หาฟังก์ชันเพิ่ม/ลดจากการแทนค่าในช่วงต่างๆ

4.3) หาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์

$$\text{ต่ำสุดสัมพัทธ์ : } f(1) = -27$$



4.4) หาค่า $f(4) = 0$ ด้วย

5) หาจุดเปลี่ยนเว้า ($f''(x)=0$)

$$\text{จาก } f''(x) = (x-4)^2(4x-4)$$

$$f''(x) = 4(x-4)^2 + 2(4x-4)(x-4)$$

$$f''(x) = (x-4)(4x-16+8x-8)$$

$$f''(x) = (x-4)(12x-24)$$

$$f''(x) = 12(x-4)(x-2)$$

$$0 = 12(x-4)(x-2)$$

$$x = 4, 2$$

$$\text{หาค่า } f(4) = 0, f(2) = -16$$

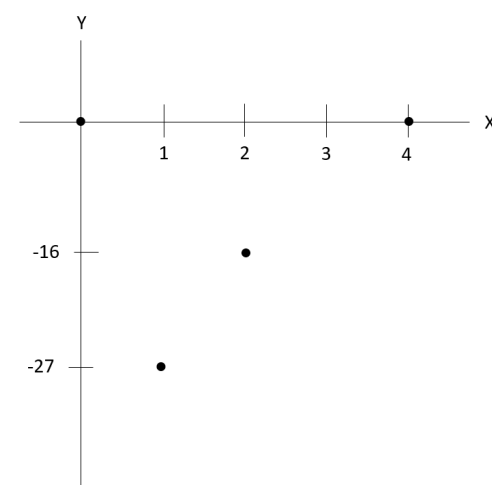
6) หาความเว้า

จากจุดเปลี่ยนเว้า เราจะวาดเส้นจำนวน แล้วแทนค่าช่วงต่างๆใน $f''(x)$ ดูว่าเว้าบนหรือเว้าลง

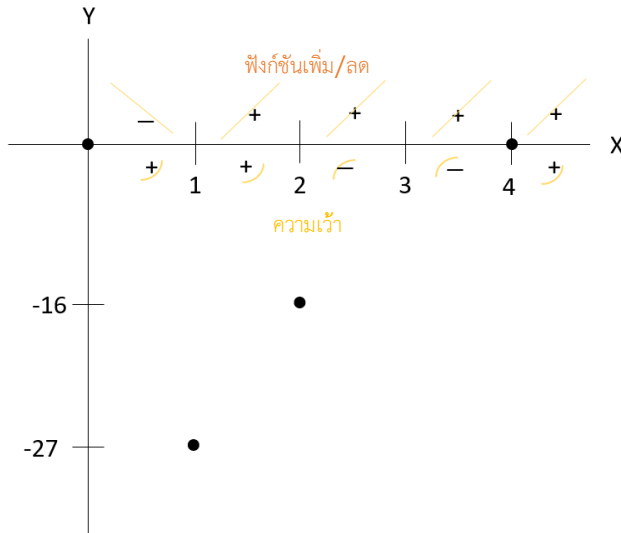


7) วาดกราฟ

7.1) วาดเส้นกำกับ และใส่จุดทุกจุดที่เกี่ยวข้อง

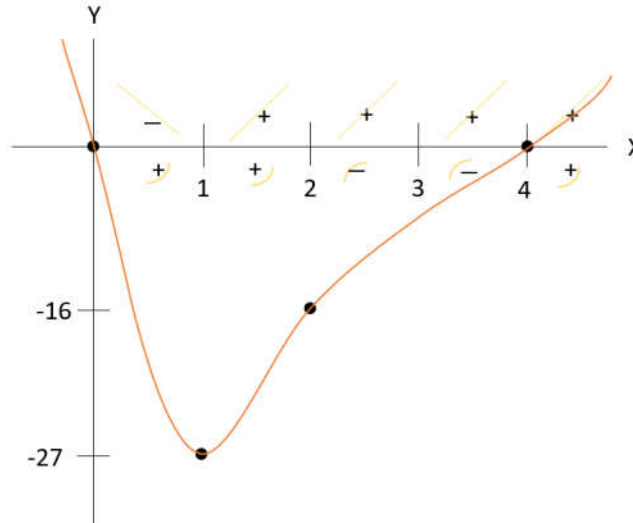


7.2) ใส่ช่วงฟังก์ชันเพิ่ม/ลด ช่วงเปลี่ยนโค้ง

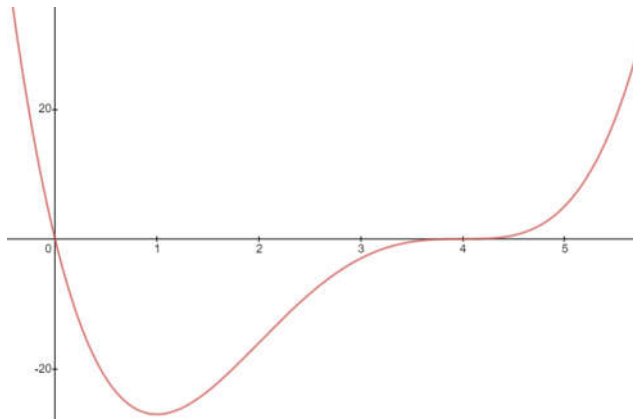


7.3) ลองวาดเส้น

รูปที่วาด



รูปจริง



Integral

นิยาม

$$\boxed{f(x)} \xrightarrow{\frac{dy}{dx}} \boxed{f'(x)}$$

$$\boxed{f'(x)} \xrightarrow{f} \boxed{f(x)}$$

ดังนั้น $f(x) = \int f'(x) dx$

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

เมื่อ $F'(x) = f(x)$

★ตัวอย่าง

$$f(x) = 2x$$

$$\int f(x) dx = x^2 + C$$

ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

★ตัวอย่าง $\int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4}$

$$= \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

สมบัติของปริพันธ์

$$1. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \text{การกระจายผ่าน } +/- \text{ ได้ } \int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$3. \text{แยกช่วงได้ } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ทฤษฎีบทหลักมูลที่หนึ่งของแคลคูลัส

①

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x)$$

ทุก x บนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

★ตัวอย่าง $F(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$ ต้องการหา $F'(x)$

$$F'(x) = \sqrt{\cos x}$$

②

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) \frac{d}{dx} u(x)$$

★ตัวอย่าง

$$F(x) = \int_{-1}^{\sin x} \frac{1}{t^3 + 2} dt \text{ ต้องการหา } F'(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{(\sin x)^3 + 2} \cdot \cos x$$

การหาปริพันธ์ที่ละส่วน

$$\int u dv = uv - \int v du$$

★ตัวอย่าง

$$\int x 3^x dx$$

กำหนด $u = x$

$$dv = 3^x \rightarrow v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$\int x e^x dx = x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx$$

$$= x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2}$$

การหาปริพันธ์โดยแยกเป็นเศษส่วนย่อย

1) แยกตัวประกอบ

2) จัดรูป

linear factor $(ax + b)^n$

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

quadratic factor $(ax^2 + bx + c)^m$

$$\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

3) หา A, B, C

$$\star \text{ตัวอย่าง} \quad \int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{x^2-x} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{x^2-x} dx &= \int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{x(x-1)} dx \\ &= \int x + 3 + \frac{x-2}{x(x-1)} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{x-2}{x(x-1)} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \ln|x| - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

เทคนิคอินทิเกรต : ฟังก์ชัน ln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

สมบัติของ ln สำหรับ $x, y > 0$

1. $\ln$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มที่มีความต่อเนื่องบน $(0, \infty)$
2. $\ln xy = \ln x + \ln y$
3. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
4. $\ln x^r = r \ln x$

★ ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^2 x}{x} dx &= \int \frac{\ln^2 x}{x} d(\ln x) \\ &= \int \ln^2 x d(\ln x) \\ &= \ln^3 x + C \end{aligned}$$

เทคนิคอินทิเกรต : ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$\int e^x dx = e^x + C$$

สมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

1. $\exp$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $(e^x)^r = e^{xr}$

★ ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} dx &= \int e^{-\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) \\ &= -2 \int e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) \\ &= -2e^{-\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

เทคนิคอินทิเกรต : ฟังก์ชันชี้กำลังฐาน a และ ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

★ ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \int \frac{2^{3x+1}}{3^{x+25}} dx &= \int \frac{2(8^x)}{3^x(25)^x} dx \\ &= 2 \int \left(\frac{8}{75} \right)^x dx \\ &= \frac{2(8/75)^x}{\ln(8/75)} + C \end{aligned}$$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) เมื่อเจอฟังก์ชันกำลัง 2 ของตรีโกณมิติให้เปลี่ยนดังนี้

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned} \star \text{ตัวอย่าง} \quad \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \frac{d(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{4} (x + \sin 2x) \end{aligned}$$

2) เมื่อเจอฟังก์ชันตรีโกณมิติคูณกัน

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\begin{aligned} \star \text{ตัวอย่าง} \quad \int \sin 2x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(2x+5x) + \sin(2x-5x)] dx \\ &= \int \frac{1}{2} [\sin(7x) - \sin(3x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 3x}{3} \right] \\ &= -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos 3x}{6} \end{aligned}$$

เทคนิคอินทิเกรต : ตรีโกณมิติ

1)

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

2)

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

1. m เป็นเลขคี่

เปลี่ยน $\sin^2 x$ เป็น $1 - \cos^2 x$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx \\ &= \int \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x) \frac{d \cos x}{-\sin x} \\ &= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

2. n เป็นเลขคี่

เปลี่ยน $\cos^2 x$ เป็น $1 - \sin^2 x$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \int \cos x (1 - \sin^2 x)^2 \sin^{-1/2} x dx \\ &= \int \cos x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \sin^{-1/2} x \frac{d \sin x}{\cos x} \\ &= \int \sin^{-1/2} x - 2\sin^{3/2} x + \sin^{7/2} x dx \\ &= 2\sin^{1/2} x - \frac{4}{5}\sin^{5/2} x + \frac{2}{9}\sin^{9/2} x + C \end{aligned}$$

3. m, n เป็นเลขคู่

เปลี่ยน $\sin^2 x$ เป็น $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ เปลี่ยน $\cos^2 x$ เป็น $\frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \int \frac{1 - \cos^2 2x}{4} \frac{d \cos 2x}{-2 \sin 2x} \\ &= \int \frac{\sin 2x d \cos 2x}{-8 \sin 2x} \\ &= -\frac{\cos 2x}{8} + C \end{aligned}$$

3) รูปตรรกยะของ $\sin x$ และ $\cos x$

$$\text{กำหนด} \quad z = \tan \frac{x}{2} \quad dx = \frac{2}{1+z^2} dz$$

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x - \sin x + 1} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{1-z^2}{1+z^2} \right) - \left(\frac{2z}{1+z^2} \right) + 1} \left(\frac{2}{1+z^2} \right) dz \\ &= \int \frac{2}{1-z^2-2z+1+z^2} dz \\ &= \int \frac{2}{2-2z} dz \\ &= \int \frac{-1}{1-z} d(1-z) \end{aligned}$$

$$= -\ln|1-z| + C = -\ln\left|1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right| + C$$

4

$a^2 - u^2$	$u = a \sin \theta$	$du = a \cos \theta d\theta$ $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$a^2 + u^2$	$u = a \tan \theta$	$du = a \sec^2 \theta d\theta$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$u^2 - a^2$	$u = a \sec \theta$	$du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

★ตัวอย่าง1

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ให้ $x = \sin \theta$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin^3 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int \sin^3 \theta d\theta \\ &= \int \sin^2 \theta (\sin \theta d\theta) \\ &= \int (1 - \cos^2 \theta)(-\cos \theta d\theta) \\ &= -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} + C \end{aligned}$$

★ตัวอย่าง2

ให้ $x = 2 \tan \theta$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2^2 + (2 \tan \theta)^2}} 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \frac{1}{2 \sec \theta} 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C \end{aligned}$$

★ตัวอย่าง3

ให้ $x = \frac{3}{2} \sec \theta$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(4x^2-9)^{3/2}} dx &= \int \frac{\frac{27}{8} \sec^3 \theta}{(9 \sec^2 \theta - 9)^{3/2}} \cdot \frac{3}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int \frac{\frac{27}{8} \sec^3 \theta}{(9 \tan^2 \theta)^{3/2}} \cdot \frac{3}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int \frac{\frac{27}{8} \sec^3 \theta}{27 \tan^3 \theta} \cdot \frac{3}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \frac{3}{16} \int \frac{\sec^4 \theta}{\tan^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{3}{16} \int \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta} (\sec^2 \theta d\theta) \\ &= \frac{3}{16} \int \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta} d \tan \theta \\ &= \frac{3}{16} \int 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} d \tan \theta \\ &= \frac{3}{16} \left[\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} + C \right] \end{aligned}$$

5

$$\int \sec^m x \tan^n x dx$$

1. n เป็นเลขคี่

- เปลี่ยน $\sec x \tan x dx$ เป็น $d \sec x$ - เปลี่ยน $\tan^2 x$ เป็น $\sec^2 x - 1$

★ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \sec^5 x dx &= \int \tan^2 x \sec^4 x (\tan x \sec x dx) \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x d \sec x \\ &= \int \sec^6 x - \sec^4 x d \sec x \\ &= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

2. m เป็นเลขคู่

- เปลี่ยน $\sec^2 x dx$ เป็น $d \tan x$ - เปลี่ยน $\sec^2 x$ เป็น $\tan^2 x + 1$

★ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \int \tan^8 x \sec^4 x dx &= \int \tan^6 x \sec^2 x (\sec^2 x dx) \\ &= \int \tan^6 x (\tan^2 x + 1) d \tan x \\ &= \int \tan^8 x + \tan^6 x d \tan x \\ &= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^7 x}{7} + C \end{aligned}$$

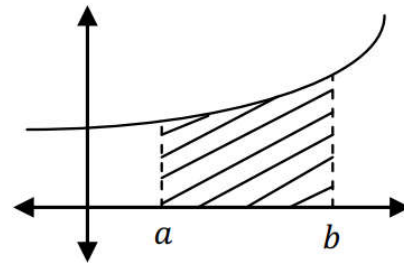
3. n เป็นเลขคู่, m เป็นเลขคี่

- ลดทอนให้เหลือ $\sec x$ แล้ว by pass

★ตัวอย่าง

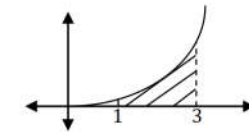
$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec x dx &= \int \tan x (\tan x \sec x dx) \\ &= \int \tan x d \sec x \\ &= \tan x \sec x - \int \sec x (\sec^2 x dx) \\ &= \tan x \sec x - \int \sec x (\tan^2 x + 1) dx \\ &= \tan x \sec x - \int \sec x \tan^2 x - \sec x dx \\ 2 \int \sec x \tan^2 x &= \tan x \sec x + \int \sec x dx \\ \int \sec x \tan^2 x &= \frac{1}{2} (\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x| + C) \end{aligned}$$

การหาพื้นที่ใต้กราฟเทียบแกน x

พื้นที่ใต้กราฟเทียบแกน x = $\int_a^b f(x) dx$ 

★ตัวอย่าง1

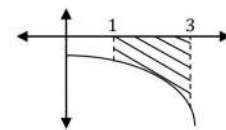
$$\int_1^3 x^2 dx$$



$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &= \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 \\ &= 9 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned}$$

★ตัวอย่าง2

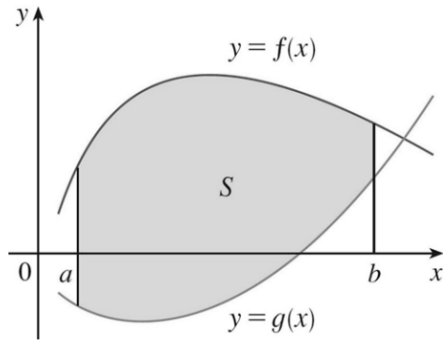
$$\int_1^3 -x^2 - 1 dx$$



$$\begin{aligned} \int_1^3 -x^2 - 1 dx &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big|_1^3 \\ &= -12 - \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{32}{3} \end{aligned}$$

พื้นที่ใต้กราฟเทียบแกน x = $\frac{32}{3}$ เมื่อพื้นที่อยู่ใต้กราฟ x จะได้ค่า $\int_a^b f(x) dx$ เป็นลบ

พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

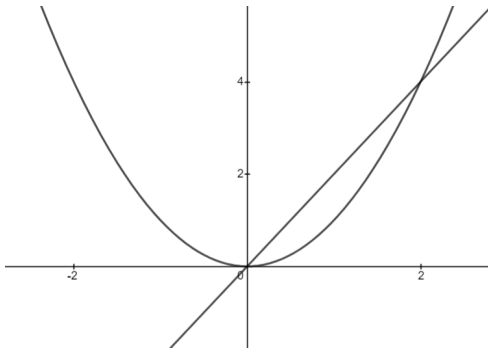


$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

โดยที่ $f(x) > g(x)$

★ ตัวอย่าง หาพื้นที่ปิดล้อมด้วยสมการ $y = 2x$ กับ $y = x^2$

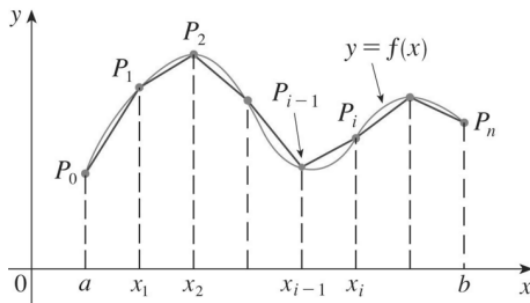
1 วาดรูป: จะเห็นว่าสนใจพื้นที่ในช่วง $[0, 2]$ และสมการ $y = 2x$ มากกว่า $y = x^2$



2 พื้นที่ที่ปิดล้อม $= \int_0^2 2x - x^2 dx$

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x - x^2 dx &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 2^2 - \frac{2^3}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ความยาวส่วนโค้ง (arc length from a to b)



$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

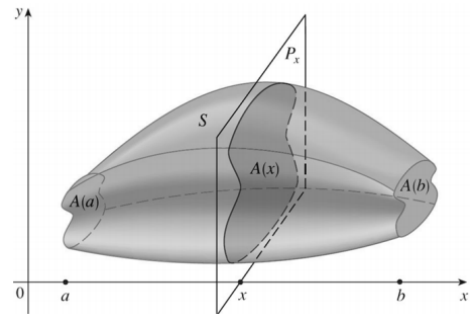
★ ตัวอย่าง $y = \sqrt{1-x^2}$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x \Big|_0^{1/2} \\ &= \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้



จากรูป เราพิจารณารูปทรงตันออกเป็นชิ้นส่วนเล็ก โดยพื้นที่ของหน้าตัดมีสมการเป็น $A(x)$

ปริมาตรของรูปตัดนั้น $= A(x) \cdot dx$

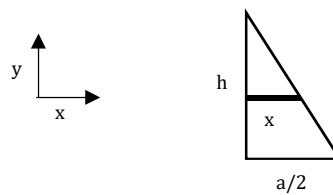
และถ้าต้องการหาปริมาตรของทรงตันทั้งอันจึงต้องคิดจาก $x=a$ ถึง $x=b$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

★ ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของพีระมิดที่มีความสูง h หน่วย และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว a หน่วย

1. เมื่อเราตัดพีระมิดได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

2. เมื่อมองด้านข้าง และ y อยู่ในช่วง $[0, h]$

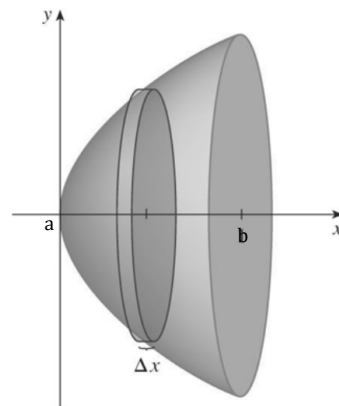


$$\begin{aligned} 3. A(y) &= \text{พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เป็นภาพตัด} \\ &= (2x)^2 \\ &= \frac{a^2}{h^2} (h-y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ ปริมาตรของพีระมิด} &= \int_0^h \frac{a^2}{h^2} (h-y)^2 dy \\ &= \int_0^h \frac{a^2}{h^2} (y-h)^2 d(y-h) \\ &= \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{(y-h)^3}{3} \Big|_0^h \\ &= \frac{a^2}{3h^2} (0 + h^3) \\ &= \frac{1}{3} a^2 h \end{aligned}$$

ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน (solid of revolution)

1. วิธีแบบงาน : หาปริมาตรของทรงตันด้วยการใช้ภาพตัด โดยภาพตัดนั้นตั้งฉากกับแกนหมุน



จากรูป เราพิจารณารูปทรงตันออกเป็นชิ้นส่วนเล็ก ได้ออกมาเป็นรูปทรงกระบอก

ปริมาตรของทรงกระบอก $= \pi r^2 h$

จากรูปข้างบนเราจะได้ว่า $r = y = f(x)$ และ $h = dx$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอกนั้น $= \pi(f(x))^2 dx$

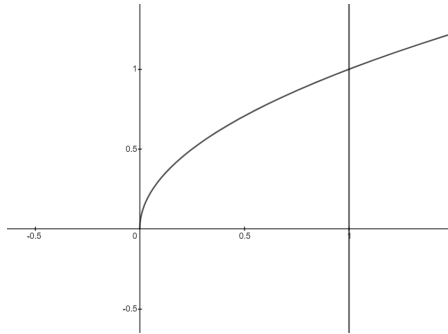
และถ้าต้องการหาปริมาตรของทรงตันทั้งอันจึงต้องคิดจาก $x = a$ ถึง $x = b$

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

★ตัวอย่าง1 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

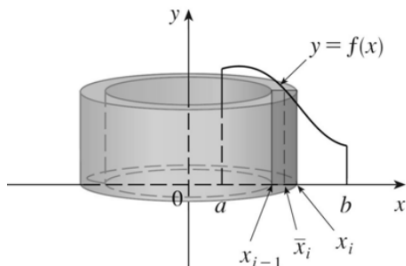
$y = \sqrt{x}$, แกน X และเส้นตรง $x = 1$ รอบแกน x

วาดรูป : หาราค่า x อยู่ในช่วง $[0, 1]$



$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของรูปทรงตัน} &= \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx \\ &= \int_0^1 \pi x dx \\ &= \frac{\pi x^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2) วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก : หาปริมาตรของทรงตันด้วยการใช้ภาพตัด โดยภาพตัดนั้นขนานกับแกนหมุน



จากรูป เราพิจารณารูปทรงตันคลี่ออกมาเป็นแผ่นๆ เหมือนกับที่ขูดมะม่วง

พื้นที่ผิวของแต่ละวง $= 2\pi rh$

ปริมาตรของแต่ละวง $= (2\pi rh)(ความหนา)$

จากรูปข้างบนเราจะได้ว่า $r = x$, $h = y = f(x)$, ความหนา $= dx$

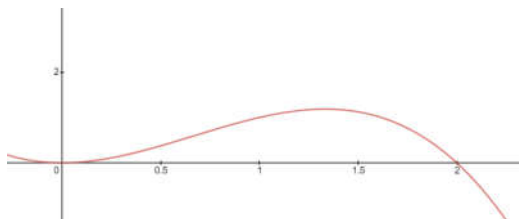
ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอกแบบวงแหวนนั้น $= 2\pi x f(x) dx$

และถ้าต้องการหาปริมาตรของทรงตันทั้งอันจึงต้องคิดจาก $x = a$ ถึง $x = b$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

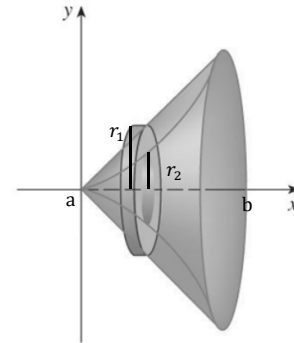
★ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณใต้เส้นโค้ง

$y = 2x^2 - x^3$ บนช่วง $[0, 2]$ รอบแกน Y



$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของรูปทรงตัน} &= \int_0^2 2\pi x(2x^2 - x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ &= \frac{16\pi}{5} \end{aligned}$$

3) หมุนเป็นวงแหวน



จากรูป เราพิจารณารูปทรงตันออกเป็นชิ้นส่วนเล็ก ได้ออกมาเป็นรูปทรงกระบอกแบบวงแหวน

ปริมาตรของทรงกระบอกแบบวงแหวนนี้ $= (\pi r_1^2 - \pi r_2^2)h$

จากรูปข้างบนเราจะได้ว่า $r_1 = f(x)$ และ $r_2 = g(x)$ เมื่อ $f(x) > g(x)$ และ $h = dx$

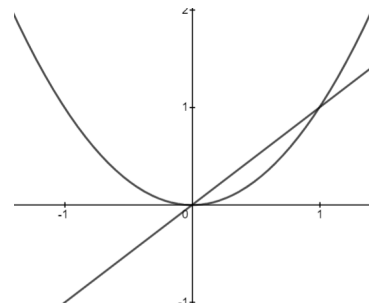
ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอกนั้น $= \pi(f(x))^2 - \pi(g(x))^2 dx$

และถ้าต้องการหาปริมาตรของทรงตันทั้งอันจึงต้องคิดจาก $x = a$ ถึง $x = b$

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 - \pi(g(x))^2 dx$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง

$y = x$ และเส้นโค้ง $y = x^2$ รอบแกน X

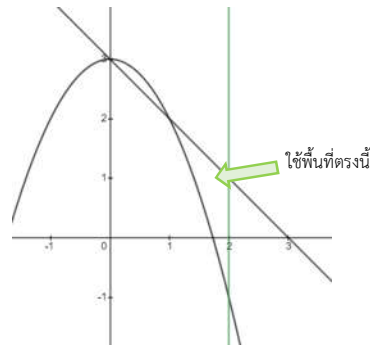


$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของรูปทรงตัน} &= \int_0^1 \pi x^2 - \pi x^4 dx \\ &= \frac{\pi x^3}{3} - \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

★ตัวอย่าง2 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

พาราโบลา $y = 3 - x^2$ เส้นตรง $y = 3 - x$ รอบเส้นตรง $x = 2$

วาดรูป



สังเกตจากแกน แกนหมุนที่ $x = 2$ ดังนั้นต้องintegralตามแกน y และแบ่งเป็น 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 : $-1 \leq y \leq 1$ ใช้วิธีแบบจาน

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของรูปทรงตันส่วนที่1} &= \int_{-1}^1 \pi(2 - \sqrt{3-y})^2 dy \\ &= \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{3-y})^2 dy \\ &= \pi \int_{-1}^1 (4 - 4\sqrt{3-y} + 3 - y) dy \\ &= \pi \int_{-1}^1 (7 - 4\sqrt{3-y} - y) dy \\ &= \pi(7y + \frac{8}{3}(3-y)^{3/2} + \frac{y^2}{2}) \Big|_{-1}^1 \\ &= 0.209 \pi \end{aligned}$$

ส่วนที่ 2 : $1 \leq y \leq 2$ ใช้วิธีแบบวงแหวน

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของรูปทรงตันส่วนที่2} &= \pi \int_1^2 (2 - \sqrt{3-y})^2 - (2 - 3 + y)^2 dy \\ &= \pi \int_1^2 (7 - 4\sqrt{3-y} - y) - (1 - 2y + y^2) dy \\ &= \pi \int_1^2 (6 - 4\sqrt{3-y} + y - y^2) dy \\ &= \pi(6y - \frac{8}{3}(3-y)^{3/2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}) \Big|_1^2 \\ &= 0.291 \pi \\ \text{ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตัน} &= \text{ส่วนที่1} + \text{ส่วนที่2} \\ &= 0.209 \pi + 0.291 \pi \\ &= 0.5 \pi \end{aligned}$$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

1) ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง (improper integral of type I)

ลู่เข้า
มีค่า

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^t f(x) dx$$

ลู่ออก
หาค่าไม่ได้

เมื่อเป็นลู่เข้าวิธีหาค่า

$$1) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

$$2) \int_b^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^t f(x) dx$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

★ตัวอย่าง1

$$\int_{-\infty}^0 2^{5x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 2^{5x} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{2^{5x}}{5 \ln 2} \right]_t^0$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2^{5t}}{5 \ln 2}$$

$$= 0$$

★ตัวอย่าง2

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot \frac{d(2x^2+1)}{4x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1/4}{\sqrt{2x^2+1}} d(2x^2+1)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{2x^2+1} \right]_t^0$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} (\sqrt{1} - \sqrt{2t^2+1})$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx \text{ หาค่าไม่ได้} \Rightarrow \text{ลู่ออก}$$

2) ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง (improper integral of type II)

เมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$$

ลู่เข้า
มีค่า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^b f(x) dx$$

ลู่ออก
หาค่าไม่ได้

เมื่อเป็นลู่เข้าวิธีหาค่า

$$1) \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

$$3) \text{มีจุดที่ไม่ต่อเนื่อง} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

★ตัวอย่าง1

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d(1-x^2)}{-2x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{-1/2}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_0^t$$

$$= 1$$

★ตัวอย่าง2

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^2} d(x-1)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\frac{-1}{x-1} \right]_t^2$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{t-1} - 1 \right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx \text{ หาค่าไม่ได้} \Rightarrow \text{ลู่ออก}$$

3) ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม (mixed improper integral) : ทำได้ด้วยการแยกช่วง

★ตัวอย่าง1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \quad \text{จะเห็นว่าที่ } x=1, f(1)=\infty$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 1^+} [2\sqrt{x-1}]_a^2 + \lim_{b \rightarrow \infty} [2\sqrt{x-1}]_2^b$$

$$= \lim_{a \rightarrow 1^+} [2 - 2\sqrt{a-1}] + \lim_{b \rightarrow \infty} [2\sqrt{b-1} - 1]$$

ดังนั้นเป็นลู่ออก

★ตัวอย่าง2

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d(-\sqrt{x})}{1/2\sqrt{x}} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{1/2\sqrt{x}}$$

$$= -2 \left[\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) \right]$$

$$= -2 \left[\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-\sqrt{x}} \Big|_a^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^b \right]$$

$$= -2 \left[\lim_{a \rightarrow 0^+} (e^{-\sqrt{1}} - (e^{-\sqrt{a}})) + \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-\sqrt{b}} - (e^{-\sqrt{1}})) \right]$$

$$= -2 \left[\frac{1}{e} - 1 + 0 - \frac{1}{e} \right]$$

$$= 2$$