



วิชา คณิตศาสตร์

ม.ปลาย ตอนที่ 16

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

โดยพี่เอ๋ วิเศษ ที่สุขพันธ์ สถาบันกวดวิชา We by the brain



สามารถรับชม รายการสอนศาสตร์ ได้ทาง
ทรูปลูกปัญญา True Visions ช่อง 9 และ PSI ช่อง 334
www.truelookpanya.com/tv  facebook.com/sonsart



true
ปลูกปัญญา

NUMBER THEORY

สมบัติของจำนวนเต็ม

การหารลงตัว (DIVISIBILITY)

บทนิยาม กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$, a หาร b ลงตัว (หรือ b หารด้วย a ได้ลงตัว) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $b = ak$
 a หาร b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \mid b$

a หาร b ไม่ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \nmid b$

เรียก a ว่า ตัวหาร (divisor) หรือตัวประกอบ (factor) ของ b

และเรียก b ว่า ตัวตั้ง (dividend) หรือ พหุคูณ (multiple) ของ a



ทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับการหารลงตัว

ทฤษฎีที่ควรรู้

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

1. $a|0$
2. $1|a$
3. $a|a$
4. ถ้า $a|b$ แล้ว $|a| \leq |b|$
5. ถ้า $a|b$ และ $b|a$ แล้ว $|a| = |b|$



เกร็ดความรู้

1. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 0 ไม่ได้ (ไม่นิยาม)
2. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 1 ลงตัวเสมอ
3. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 2 ลงตัว เมื่อจำนวนนั้นลงท้ายด้วยเลขคู่
เช่น $2 \mid 3740\underline{2}$, $2 \mid 1145\underline{8}$, $2 \mid 73467\underline{0}$
4. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นหารด้วย 3 ลงตัว
เช่น 4731 พบว่า $3 \mid 4731$ เพราะ $3 \mid (4+7+3+1) \rightarrow 3 \mid 15$
5. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 4 ลงตัว เมื่อเลข 2 หลักสุดท้ายของจำนวนนั้นหารด้วย 4 ลงตัว เช่น
 $4 \mid 7351\underline{6}$ เพราะ $4 \mid 16$
 $4 \mid 1039\underline{00}$ เพราะ $4 \mid 0$
 $4 \mid 5027\underline{40}$ เพราะ $4 \mid 40$



เกร็ดความรู้

6. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 5 ลงตัว เมื่อลงท้ายด้วย 0 หรือ 5 เช่น $5 \mid 19375$, $5 \mid 37460$
7. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 6 ลงตัว เมื่อลงท้ายด้วยเลขคู่ และผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นหารด้วย 3 ลงตัว เช่น $6 \mid 23814$ เพราะ ลงท้ายด้วยเลข 4 ซึ่งเป็นเลขคู่ และ $3 \mid (2+3+8+1+4) \rightarrow 3 \mid 18$
8. จำนวนเต็มใดๆ หารด้วย 7 ลงตัว ตรวจสอบโดยนำจำนวนนั้นตัดเลขโดดตัวสุดท้ายออก แล้วนำที่เหลือลบออกด้วยสองเท่าของเลขโดดที่ตัดออก เหลือเท่าใด ให้นำไปทำแบบเดิมไปเรื่อยๆ จนเหลือผลลัพธ์เป็นเลขโดดหลักเดียว ถ้าได้ 7 หรือ 0 หรือจำนวนเต็มที่ 7 หารลงตัว แสดงว่าจำนวนนั้นหารด้วย 7 ลงตัว เช่น

$$7 \mid 8638 \text{ เพราะ } 863 - 2(8) = 847$$

$$84 - 2(7) = 70$$

$$7 - 2(0) = \textcircled{7}$$

$$84 - 2(7) = 70$$

$$7 - 2(0) = \textcircled{7}$$



เกร็ดความรู้

9. จำนวนเต็มใดๆหารด้วย 8 ลงตัว เมื่อเลข 3 หลักสุดท้ายของจำนวนจำนวนนั้นหารด้วย 8 ลงตัว เช่น $8 \mid 73864$ เพราะ $8 \mid 864$
10. จำนวนเต็มใดๆหารด้วย 9 ลงตัว เมื่อผลบวกของเลขโดดทั้งหมดของจำนวนนั้นหารด้วย 9 ลงตัว เช่น $9 \mid 432234$ เพราะ $9 \mid (4+3+2+2+3+4) \rightarrow 9 \mid 18$
11. จำนวนเต็มใดๆหารด้วย 10 ลงตัว เมื่อลงท้ายด้วย 0 เช่น $30250, 217310, 405020$
12. จำนวนเต็มใดๆหารด้วย 11 ลงตัว เมื่อผลต่างระหว่างผลบวกของเลขโดดในตำแหน่งคี่กับผลบวกของเลขโดดในตำแหน่งคู่ เท่ากับ 11 หรือ 0 หรือจำนวนเต็มที่ 11 หารลงตัว
เช่น $11 \mid 65802$ เพราะ ผลบวกตำแหน่งคี่ $= 6 + 8 + 2 = 16$
ผลบวกตำแหน่งคู่ $= 5 + 0 = 5$
ดังนั้น ผลต่างของผลบวกตำแหน่งคี่กับผลบวกตำแหน่งคู่ $= 11$



ทฤษฎีเพิ่มเติม

กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

1. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
2. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$
3. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$



ทฤษฎีเพิ่มเติม

4. ถ้า $a \mid b$, $a \mid c$ และ x, y เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว $a \mid (bx + cy)$

(ทฤษฎีนี้ เรียกว่า Linear combination)

หมายเหตุ (1) รูปแบบ $bx + cy$ เรียกว่า ผลรวมเชิงเส้นของ b และ c

(2) ในกรณี $x = 1$ และ $y = 1$ จะได้ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$

(3) ถ้า และ $a \mid b_1, a \mid b_2, \dots, a \mid b_n$ และ $x_1, x_2, \dots, x_n$

เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a \mid (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_nx_n)$

5. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid (b + c)$ แล้ว $a \mid c$

6. ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$



ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ทฤษฎี ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มคู่หนึ่งและคู่เดียวเท่านั้น คือ q และ r ซึ่ง $b = aq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |a|$ เรียก q ว่าผลหาร (quotient) และ r ว่าเศษเหลือ (remainder)



จำนวนเฉพาะ (Prime number)

บทนิยาม จำนวนเต็ม P เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $P \neq 1, -1$
และถ้าจำนวนเต็ม x หาร P ลงตัว แล้ว $x \in \{1, -1, P, -P\}$

NOTE.. จำนวนเต็มอื่นๆ ที่ไม่ใช่ $1, 0, -1$ และไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เรียกว่า
จำนวนประกอบ (Composite numbers)



เกร็ดความรู้

1. จำนวนเฉพาะทั้งหมด จะมีเพียง $2, -2$ ที่เป็นจำนวนเต็มคู่ นอกนั้นจะเป็นจำนวนเต็มคี่
2. ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว $-p$ จะเป็นจำนวนเฉพาะด้วย
3. ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a \in I$ ถ้า $a|p$ แล้ว $a = \pm 1$ หรือ $a = \pm p$
4. ถ้า p, q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p|q$ แล้ว $|p| = |q|$



5. จำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า 1000 ได้แก่

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997



ตัวหารร่วมมาก (The Greatest Common Divisor)

บทนิยาม ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม แล้วมีจำนวนเต็ม c ที่สามารถหารทั้ง a และ b ได้ลงตัว เรากล่าวว่า c เป็นตัวหารร่วมของ a และ b

บทนิยาม กำหนดจำนวนเต็ม a, b ซึ่ง $a^2 + b^2 \neq 0$
จำนวนเต็มบวก d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ a กับ b ก็ต่อเมื่อ

1. $d|a$ และ $d|b$
2. ถ้า c เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $c|a$ และ $c|b$ และ $c \neq 0$ จะได้ว่า $c|d$
แทน ห.ร.ม. ของ a, b ด้วย (a, b)



เกร็ดความรู้

1. เราสามารถหา (a, b) ได้เสมอ เมื่อ $a^2 + b^2 \neq 0$
2. (a, b) มีเพียงจำนวนเดียว และเป็นจำนวนเต็มบวก
3. $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$
4. $(a, b) = (b, a)$
5. $(a, 0) = |a|$ เมื่อ $a \neq 0$ เช่น $(7, 0) = |7| = 7$



เกร็ดความรู้

6. ถ้า $a|b$ แล้ว $(a, b) = |a|$ เช่น $-3|6$ แล้ว $(-3, 6) = |-3| = 3$
7. $(ma, mb) = m(a, b)$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก
8. $(a, a) = |a|$ เช่น $(-7, -7) = |-7| = 7$
9. $(a, 1) = 1$ เช่น $(7, 1) = 1, (-7, 1) = 1$
10. $(a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c)), ((a, c), b)$



การหา ห.ร.ม. โดยใช้ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด

ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด (Euclidean Algorithm)

ให้ $a, b \in \mathbb{N}$ และ $a > 0$ จะได้ว่า มี $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, q_{n+1}, r_1, r_2, r_3, \dots, r_n \in \mathbb{N}$

ที่ทำให้

$$b = a q_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < a$$

$$a = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$

$\vdots$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

$$\text{และ } (a, b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$



ตัวคูณร่วมน้อย (The Least Common Multiple)

บทนิยาม

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ จำนวนเต็มบวก c จะเป็นตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $a|c$ และ $b|c$
2. ถ้า p เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a|p$ และ $b|p$ จะได้ $c|p$
แทน ค.ร.น. ของ a, b ด้วย $[a, b]$



เกร็ดความรู้

1. $[a, b]$ มีเพียงจำนวนเดียว และเป็นจำนวนเต็มบวก
2. $[a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b]$
3. $[a, b] = [b, a]$
4. $[a, 0]$ ไม่นิยาม
5. ถ้า $a|b$ แล้ว $[a, b] = |b|$



เกร็ดความรู้

6. $[ma, mb] = m[a, b]$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก
7. ถ้า $a|c$ และ $b|c$ แล้ว $[a, b]|c$
8. $[a, b, c] = [[a, b], c] = [a, [b, c]] = [[a, c], b]$
9. ความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. และ ค.ร.น.
เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ
 $(a, b) \cdot [a, b] = ab$



จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (Relatively prime numbers)

บทนิยาม จำนวนเต็มสองจำนวน a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์
ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = 1$



កុមារីជំនាញ



NUMBER THEORY

- 1) ถ้า $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ และสอดคล้องกับ
 $(56 \times a) + (7 \times b) + c = 416$ แล้ว $a + b + c$
เท่ากับเท่าใด



สอ
พทส

เมื่อ $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$$416 = (56 \times a) + (7 \times b) + c$$



2) กำหนด $a, b \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ และ $1a5, 6b9$
เป็นจำนวนสามหลัก ถ้า $6b9 - 1a5 = 454$ และ
 $6b9$ หารด้วย 9 ลงตัว แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด



$$639 - 1a5 = 454$$



3) จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมีสี่หลัก และหารด้วย 90 ลงตัว
ถ้าจำนวนนี้มีตัวเลขหลักพันเป็น 2 และหลักร้อยเป็น 1 แล้ว
หลักสิบคือข้อใดต่อไปนี้



4) จงหาจำนวนเต็มบวกสามหลักทั้งหมด ซึ่งมีค่าเป็น
30 เท่าของผลบวกของเลขทั้งสามหลัก



สอ
พทส

5) กำหนดให้ $xyz = 2$, $x + \frac{1}{z} = 32$, $y + \frac{1}{x} = 81$ และ
 $z + \frac{1}{y} = \frac{p}{q}$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ ห.ร.ม
ของ p และ q เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $|p - q|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. 3,925

2. 4,832

3. 4,951

4. 5,182



$$\left(x + \frac{1}{z}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) \left(z + \frac{1}{y}\right) = 32 \times 81 \times \frac{p}{q}$$



สอ
พทส

6. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a > b > c$
ถ้า $abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1989$
แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่าใด



สอ
พทส

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก, $a > b > c$

$$(c + 1)(b + 1)(a + 1) = 1990$$



$$2 \times 5 \times 199$$



7) กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ 2520 เท่ากับ 60 และ ค.ร.น. ของ a และ 420 เท่ากับ 4620 แล้ว a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. [200 , 350)

2. [350 , 500)

3. [500 , 650)

4. [650 , 800)

5. [800 , 950)



$$(a, 2520) = 60$$

$$[a, 420] = 4620$$



8) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

a หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

และ b หารด้วย 6 เหลือเศษ 4

ถ้า $a + 1 = b + 2$

แล้ว $a + b$ หารด้วย 12 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด





www.trueplookpanya.com