



# วิชา คณิตศาสตร์

ม.ต้น ตอนที่ 21

## เรื่อง การแปรผัน

โดยพี่ออย รัชฎาภรณ์ โษะอ้อมอุดม พิมพ์พิศิตวิเวต



สามารถรับชม รายการสอนศาสตร์ ได้ทาง  
ทรูปลูกปัญญา True Visions ช่อง 9 หรือ PSI ช่อง 334  
[www.trueplookpanya.com/tv](http://www.trueplookpanya.com/tv)  [facebook.com/sonsart](https://facebook.com/sonsart)



# การอุปสรพ์น



**การแปรผัน (variation) คือ ความสัมพันธ์ระหว่าง  
ปริมาณสองปริมาณหรือมากกว่า โดยที่เมื่อสิ่งหนึ่ง  
เปลี่ยนไปอีกสิ่งหนึ่งก็จะเปลี่ยนไปด้วยอย่างใดสัดส่วนกัน  
เช่น**

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. On a yellow rectangular block, the Thai text "สอนพิเศษ" (Suan Pitsak) is written in a colorful, stylized font. The characters are multi-colored: "ส" is green, "อ" is blue, "น" is orange, "พ" is purple, "ิ" is yellow, and "ศ" is blue.

**สอนพิเศษ**

การแปรผันตรง (Direct variation) หมายถึง ความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณ โดยที่ปริมาณหนึ่งเพิ่มขึ้นอีกปริมาณหนึ่งจะเพิ่มขึ้น แต่ถ้าปริมาณหนึ่งลดลงอีกปริมาณหนึ่งจะลดลง

ให้  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x$  เมื่อ  $y = kx$

โดยที่  $k$  เป็นค่าคงตัวและ  $k \neq 0$

$y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $y \propto x$



1. ถ้า  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x$  ขณะ  $x = 15$  และ  $y = 108$   
จงหาค่าของ  $y$  เมื่อ  $x = 60$



เรียน  
การณ

2. ถ้า  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $2x + 1$  ถ้า  $y = 6$  แล้ว  $x = \frac{5}{2}$   
จงหาค่า  $y$  เมื่อ  $x = \frac{9}{2}$



เรียนพิเศษ

**3. ถ้า B แปรผันตรงกับ  $A^n$  เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก  
เมื่อ  $A = 2$  แล้ว  $B = 8$  และ  $A = 3, B = 18$   
จงหาสมการของการแปรผัน**



เรียนที่ไหนก็ได้

4. เมื่ออัตราเร็วคงเต็ม ระยะทางที่รถยนต์วิ่งได้แปรผันกับ  
เวลาที่ใช้ในการเดินทาง ถ้ารถยนต์วิ่งได้ 180 กิโลเมตร ใน  
เวลา 2 ชั่วโมง 15 นาที จงหาระยะทางที่รถยนต์วิ่งได้ในเวลา  
7 ชั่วโมง

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "สอนพิเศษ" (Suan Pitsan) is written in a colorful, stylized font across the shapes.

สอนพิเศษ



5. ระยะทาง  $S$  ที่วัตถุเคลื่อนที่จะแปรผันตรงกับกำลังสองของเวลาคือ  $t$  ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 256 ฟุต ในเวลา 4 วินาที วัตถุเคลื่อนที่ในเวลา 6 วินาที จะได้ระยะทางเท่าใด

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "เรียนที่ไหนก็ได้" (Learn wherever you want) is written in a colorful, stylized font on a yellow rectangular background.

เรียนที่ไหนก็ได้

## 6. จากตารางที่กำหนดให้จงหาสมการของการแปรผัน

|   |    |    |     |     |
|---|----|----|-----|-----|
| X | 60 | 90 | 120 | 150 |
| Y | 2  | 3  | 4   | 5   |



เรียนพิเศษ

**7. ค่าใช้จ่ายในการจัดเลี้ยง ส่วนหนึ่งมีค่าคงที่อีกส่วนหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนแขกที่มาในงานเลี้ยง ถ้ามีแขก 80 คน จะสิ้นค่าใช้จ่าย 64 บาท ถ้ามีแขก 120 คน จะสิ้นค่าใช้จ่าย 88 บาท ถ้ามีผู้เข้ามาในงานเลี้ยง 200 คน ต้องสิ้นค่าใช้จ่ายเท่าใด**



สอนพิเศษ

8.  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x^2$  และ  $y = 8$  เมื่อ  $x = 2$   
ถ้า  $x = 3$  แล้ว  $y$  จะมีค่าเท่าใด



เรียน  
การัน

9. ถ้า  $x + 1$  แปรผันตรงกับ  $2y - 1$  และ  $x = -3$  เมื่อ  $y = 3$  หาก  $y = 8$  แล้ว  $x$  จะมีค่าเท่าใด



เรียนที่ไหนก็ได้

10. ถ้า  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $\sqrt{x^3}$  และ  $y = 9$   
เมื่อ  $x = 9$  ถ้า  $x = 4$  แล้ว  $y$  จะมีค่าเท่าใด



เรียนที่ไหนก็ได้

11. ถ้า  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x^2$  จงหาว่า

1.ถ้า  $x$  เป็น 3 เท่าของปริมาณเต็ม  $y$  จะเป็นกี่เท่า  
ของปริมาณเต็ม



เรียนที่ไหนก็ได้

2. ถ้า  $x$  เป็น  $\frac{1}{4}$  เท่าของปริมาณเต็ม  $y$  จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเต็ม



เรียนที่ไหนก็ได้



3. ถ้า  $x$  ลดลง  $\frac{1}{3}$  ของปริมาณเต็ม  $y$  จะเป็นกี่เท่าของปริมาณเต็ม



เรียนที่ไหนก็ได้

**12. ระยะทางที่วัตถุตกลงมาเป็น  $s$  เมตร ในเวลา  $t$  วินาที  
แปรผันโดยตรงกับ  $t^2$  ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งตกลงมาได้ทาง 257.6 เมตร  
ในเวลา 4 วินาที**

**1. จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที วัตถุตกลงมาได้ทางเท่าใด**



เรียนที่ไหนก็ได้

2. จงหาระยะทางที่วัตถุตกลงมาเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "เล่นสนุก" (Lan Nang) is written in a colorful, stylized font on a yellow rectangular block.

เล่น  
สนุก

**13. เวลาของการแกว่งลูกตุ้มลูกหนึ่งแปรผันโดยตรงกับรากที่สองของ  
ความยาวของลูกตุ้ม ถ้าลูกตุ้มลูกหนึ่งยาว 1 เมตร แกว่ง 1 ครั้ง  
กินเวลา 1 วินาที จงหาความยาวของลูกตุ้มซึ่งแกว่ง 75 ครั้ง  
ในเวลา 1 นาที**

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "เรียน การบ้าน" (Learn Homework) is written in a colorful, stylized font on a yellow rectangular background.

เรียน  
การบ้าน

**14. ปริมาตรของทรงกลม (V) แปรผันโดยตรงกับกำลังสามของรัศมี (R)  
ถ้ารัศมียาว 42 เซนติเมตร ปริมาตรจะเท่ากับ 310,464 ลูกบาศก์เซนติเมตร  
จงหาปริมาตรของทรงกลม เมื่อรัศมียาว 21 เซนติเมตร**



เรียน  
การัน

**15. ระยะทางที่รถไฟขบวนหนึ่งที่กำลังเร่งฝีจักรวิ่งไต้นั้นแปรผัน  
โดยตรงกับอัตราเร่งและกำลังสองของเวลา ถ้าระยะทางที่วิ่งได้เมื่อสิ้น  
วินาทีที่ 16 และสิ้นวินาทีที่ 17 ต่างกันอยู่ 132 ฟุต จงหาระยะทางที่  
รถไฟขบวนนี้วิ่งได้ 4 วินาที**

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "สอนพิเศษ" (Suan Pitsan) is written in a colorful, stylized font over the yellow shape.

**สอนพิเศษ**

# การแปรผกผัน (Inverse variation)

หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ โดยที่ถ้าปริมาณหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นอีกปริมาณหนึ่งจะลดลง

ให้  $y$  แปรผกผันกับ  $x$  เมื่อ  $y = \frac{k}{x}$  โดยที่  $k$  เป็นค่าคงตัว และ  $k \neq 0$

$y$  แปรผกผันกับ  $x$  เขียนแทนด้วย  $y \propto \frac{1}{x}$



16. ถ้า  $y$  แปรผกผันกับกำลังสองของ  $x$  เมื่อ  $x = 3$  แล้ว  $y = 36$  จงหาค่า  $y$  เมื่อ  $x = 8$

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "เรียนที่ไหนก็ได้" (Learn wherever you want) is written in a colorful, stylized font on a yellow rectangular background.

เรียนที่ไหนก็ได้



17. จงหาค่าคงที่เมื่อส่วนหนึ่งของ  $P$  คงที่ และอีกส่วนหนึ่ง  
แปรสพกผันกับ  $Q$  ถ้า  $P = 40$  เมื่อ  $Q = 5$  และ  $Q = 4$  เมื่อ  
 $P = 30$



สอน  
พิเศษ

18. A แปรผกผันกับรากที่สองของ B ถ้า  $B = 3$   
เมื่อ  $A = 4$  จงหาค่า B เมื่อ  $A = 36$



เรียนที่ไหนก็ได้

19. ถ้า  $y$  แปรผกผันกับรากที่สองของ  $x$  และ  $x = 16$   
เมื่อ  $y = 200$  จงหาค่า  $x$  เมื่อ  $y = 160$



เรียนพิเศษ

20. เวลาในการเดินทางแปรผกผันกับอัตราเร็ว ถ้าเดินทาง  
อัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะใช้เวลา 5 ชั่วโมง  
ถ้าใช้อัตราเร็ว 45 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะใช้เวลาน้อยลงเท่าใด



สอนพิเศษ

21. ถ้า  $y$  เท่ากับผลบวกของเลขสองจำนวน ซึ่งจำนวนแรก  
แปรผันตรงกับ  $x$  อีกจำนวนหนึ่งแปรผกผันกับ  $x$  ถ้า  $y = 8$ ,  
 $x = 5$  และ ถ้า  $y = 10$ ,  $x = 6$  จงหาค่า  $y$  เมื่อ  $x = 3$



สอน  
พิเศษ

22. ถ้า  $y$  แปรผกผันกับรากที่สองของ  $x$  และ  $y = 3$   
เมื่อ  $x = 4$  ถ้า  $x = 9$  แล้ว  $y$  จะมีค่าเท่าใด



เรียน  
การณ

23. บริษัทรับเหมาก่อสร้าง สร้างถนนมีคนงาน 15 คน ช่อมถนนสายหนึ่ง คนงานทั้งหมดช่วยกันช่อมถนนไปได้ครึ่งหนึ่ง ใช้เวลา 7 วัน ถ้ากำหนดวันทำงานแล้วเสร็จแปรพหุพันธ์กับจำนวนคนงาน จงหาว่าบริษัทรับเหมาจะต้องเพิ่มคนงานอีกกี่คน จึงจะทำงานที่เหลือแล้วเสร็จในเวลา 5 วัน



สอนพิเศษ

24. ให้ส่วนหนึ่งของ  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x^3$  และอีกส่วน  
หนึ่งของ  $y$  แปรผันแบบผกผันกับ  $x^2$  โดยที่ถ้า  $x = 1$   
ได้  $y = 9$  และ ถ้า  $x = -1$  ได้  $y = 1$  แล้วจงหาค่าของ  
 $y$  ถ้า  $x = 2$



สอน  
พิเศษ



25.  $x + 1$  แปรสพกพันกับ  $y - 2$  เมื่อ  $x = 4$  ,  $y = 8$   
เมื่อ  $x = 2$  แล้ว  $y$  มีค่าเท่าไร



เรียนที่ไหนก็ได้

26. ถ้า  $y$  แปรผกผันกับกำลังสองของ  $x$  ถ้า  $x$  เพิ่มขึ้น 25% และ  $y$  จะมีค่าเป็นกี่เท่าของค่าเดิม

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "เรียนที่ไหนก็ได้" (Learn wherever you want) is written in a colorful, stylized font on a yellow rectangular background.

เรียนที่ไหนก็ได้

27. P แปรผกผันกับ Q ถ้า P เพิ่มขึ้น 50% แล้ว Q  
จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงกี่ %



สอน  
พิเศษ

28. ถ้า  $y$  แปรผกผันกับ  $x + \sqrt{x}$  และ  $y = 1$

เมื่อ  $x = 2$  จงหาค่า  $x$  เมื่อ  $y = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$



สอน  
พิเศษ

29. ถ้ากำลังสองของ  $x$  แปรผกผันกับกำลังสามของ  $y$   
และ  $x = 3$  เมื่อ  $y = 4$  ถ้า  $x = \sqrt{72}$  แล้ว  $y$  มีค่าเท่าไร



เรียนที่ไหนก็ได้

30. ถ้า  $y$  แปรผกผันกับ  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

ให้  $y = 1$  เมื่อ  $x = 1$  จงหาค่า  $y$  เมื่อ  $x = 8$

1.  $\sqrt{2}+1$

2.  $\sqrt{2}-1$

3.  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

4.  $\frac{1}{2\sqrt{2}+1}$



สอนพิเศษ

## การแปรผันต่อเนื่อง (Combined Variation)

คือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับชุดของตัวแปรต้นที่มีหลายตัว ซึ่งแต่ละตัวของตัวแปรต้น จะมีความสัมพันธ์แบบแปรผันตรง หรือ แปรผกผันกับตัวแปรตามก็ได้ โดยจะมีค่าคงที่เป็นตัวเดียวกัน



**31. ถ้า A แปรผันกึ่งวเนื่องกับ B และ  $C^2$  เมื่อ  $A = 6$  แล้ว  $B = 9$   
และ  $C = 3$  จงหาค่าของ A เมื่อ  $B = 54, C = 4$**



เรียนพิเศษ



32. ถ้า  $y$  แปรผันโดยตรงกับ  $x$  และ แปรผกผันกับ  $z$   
กำหนด  $x = 6$  ,  $y = 1$  ,  $z = 2$  จงหา  $y$  เมื่อ  $x = 18$   
และ  $z = 2$



เรียนพิเศษ

33. ถ้า  $y$  แปรผันต่อนื่องกับ  $x$  และ  $z$  แต่แปรผกผันกับ

$w$  ถ้า  $x = 5$  ,  $y = 20$  ,  $z = 2$  ,  $w = 1$

จงหาค่า  $y$  ถ้า  $x = 10$  ,  $z = 3$  ,  $w = 12$



34. ถ้า  $y$  แปรผันเกี่ยวข้องกับ  $x$  และ  $z^2$  ถ้า  $y = 6$   
เมื่อ  $x = 9, z = 3$  จงหาค่า  $y$  เมื่อ  $x = 16, z = 9$



เรียน  
ที่ไหนก็ได้

35. ถ้า  $x$  แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ  $y$  และ  $z$  เมื่อ  $x = 12$   
,  $y = 3$  และ  $z = 2$  จงหาค่า  $x$  เมื่อ  $y = 1$  และ  $z = 3$



สอนพิเศษ

36. ถ้า  $y$  แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ  $x$  และ  $z$  โดยที่  $y$   
แปรผกผันกับรากที่สองของ  $u$  ให้  $y = 2$  เมื่อ  $x = 6, z = 8$   
และ  $u = 9$  จงหา  $y$  เมื่อ  $x = 2, z = 4, u = 4$



สอนพิเศษ

37. ให้  $x$  แปรผกผันกับรากที่สองของ  $y$  และแปรผันตรงกับรากที่สองของ  $z$  ถ้า  $x = 3$  เมื่อ  $y = 4$  และ  $z = 6$  ค่าของ  $y$  เป็นเท่าไร เมื่อ  $x = 2, z = 2$



สอนพิเศษ

38. ถ้า  $x$  แปรผันตรงกับ  $z^2$  และแปรผกผันกับ  $y$  แล้ว  $x = 4$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2$  จงหาค่าของ  $z$  เมื่อ  $x = 2$ ,  $y = 8$



เรียนที่ไหนก็ได้

39. ถ้า  $x$  แปรผันโดยตรงกับรากที่สองของ  $y$  และ  
แปรผกผันกับกำลังสามของ  $z$  เมื่อ  $x = 4$  ,  $y = 9$  ,  $z = 1$   
และถ้า  $x = \frac{1}{3}$  ,  $z = 2$  แล้ว  $y$  มีค่าเท่าไร



เรียนที่ไหนก็ได้



40. ถ้า  $z$  แปรผันโดยตรงกับ  $xy^2$  และ  $y$  แปรผกผันกับ  $x$   
เมื่อ  $x = 4$  จะได้  $z = 6$  จงหาว่าเมื่อ  $z = 8$  แล้ว  $x$  มีค่าเท่าไร



เรียนที่ไหนก็ได้

41. ถ้า  $x$  แปรผันเกี่ยวข้องกับ  $a$  และ  $b$  และแปรผกผันกับ  $d$  ถ้า  $a$  เพิ่มขึ้น 50% ,  $b$  ลดลง 50% และ  $d$  เพิ่มขึ้น 20% แล้ว  $x$  จะลดลงกี่ %



สอนพิเศษ

42. ถ้า  $a$  แปรผันโดยตรงกับ  $c ( b - 2 )$  และ  $c$  แปรผัน  
โดยตรงกับ  $b + 2$  ถ้า  $a = 24$  เมื่อ  $b = 4$  แล้ว  $a$  มีค่า  
เท่าไร เมื่อ  $b = 5$



เรียนที่ไหนก็ได้

43. ถ้า  $P$  แปรผันตาม  $Q^2$ ,  $Q$  แปรผันตาม  $\sqrt{R}$  แต่  $R$  แปรผกผันกับ  $S^2$  เมื่อ  $Q = 2$  ให้  $P = 8$ ,  $R = 4$

และ  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$  จงหา  $S$  เมื่อ  $P = 13\frac{1}{2}$



เรียนที่ไหนก็ได้

**44. กำลังไฟฟ้า  $P$  แปรผันเกี่ยวเนื่องโดยตรงกับความต้านทาน  $R$  และกำลังสองของกระแสไฟฟ้า  $I$  ถ้ากำลังไฟฟ้า 60 วัตต์ เมื่อความต้านทานเป็น 15 โอห์ม และกระแสไฟฟ้า 2 แอมแปร์ จงหา กำลังไฟฟ้า เมื่อกระแสไฟฟ้าเป็น 3 แอมแปร์ และความต้านทานเป็น 20 โอห์ม**



เรียน  
การัน

45. ปริมาตรของพีระมิดแปรผันโดยตรงกับพื้นที่ฐานและ  
ความสูงตรง ถ้าพีระมิดมีปริมาตร 390 ลูกบาศก์นิ้ว เมื่อ  
พื้นที่ฐานเป็น 45 ตารางนิ้ว และสูงตรงเป็น 26 นิ้ว จงหา  
ปริมาตรของพีระมิดที่มีพื้นที่ฐานเป็น 60 ตารางนิ้ว และสูง  
ตรงเป็น 14 นิ้ว

A decorative graphic in the bottom right corner consisting of overlapping yellow and purple geometric shapes. The Thai text "สอนพิเศษ" (Suan Pitsa) is written in a colorful, stylized font on a yellow rectangular background.

สอนพิเศษ



[www.trueplookpanya.com](http://www.trueplookpanya.com)