

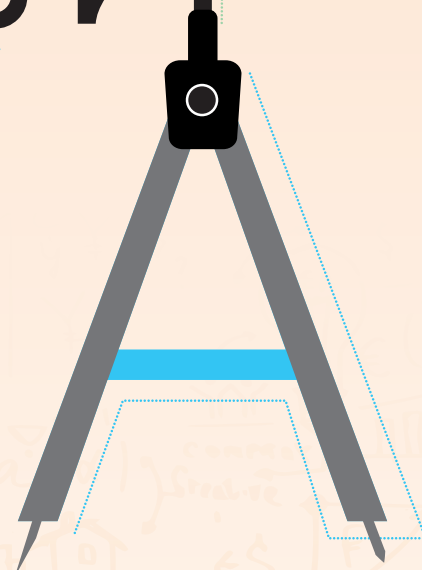


ฝึกคิด พิชิตคณิต

P



S



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

กระทรวงศึกษาธิการ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มุ่งเน้นพัฒนาการศึกษา วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีของประเทศไทยให้ทัดเทียมกับนานาชาติ โดยทำหน้าที่หลักเป็นผู้ขับเคลื่อนการจัดการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ด้วยการศึกษาค้นคว้า วิจัย พัฒนา ออกแบบ จัดทำต้นฉบับ และเผยแพร่นวัตกรรมทางการศึกษา โดยมีเป้าหมายเพื่อยกระดับคุณภาพการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีของประเทศไทยได้อย่างทั่วถึง และมีมาตรฐานทัดเทียมกับนานาชาติภายใต้บริบทของความเป็นไทย

สสวท. ได้จัดทำโครงการพัฒนาตำราและสื่อ สำหรับหลักสูตรการผลิตและพัฒนาครูวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ขึ้นเพื่อพัฒนาตำราที่สอดคล้องกับบริบทไทยและได้มาตรฐานทัดเทียมนานาชาติ หนังสือ “ฝึก คิด พิชิตคณิต PISA” นี้ เป็นหนังสือที่พัฒนาขึ้นโดยคณะทำงานของโครงการดังกล่าว มีเนื้อหาประกอบด้วยโจทย์ปัญหาที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาในปัจจุบัน การเสนอแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหาซึ่งผู้อ่าน ครูผู้สอน ผู้ปกครอง และแม้แต่นักเรียนเองสามารถนำโจทย์ปัญหาเหล่านั้นมาใช้ในการฝึกฝน เพื่อให้เกิดการพัฒนาด้านการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการนำความรู้คณิตศาสตร์ที่เรียนมาไปใช้แก้ปัญหา อันเป็นสมรรถนะสำคัญที่พึงบังเกิดกับผู้เรียน ในอันที่จะเป็นพลเมืองที่มีความสามารถในการดำรงชีวิตที่ดีต่อไป

สสวท. ขอขอบคุณ คุณหญิงสุมนหา พรหมบุญ ประธานมูลนิธิวิทยาศาสตร์ ดร.ปรีชา-ประไพ อมาตยกุล ในการเป็นที่ปรึกษาของโครงการ และขอขอบคุณคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากมหาวิทยาลัย โรงเรียน และสถาบันอื่น ๆ ที่ให้ความร่วมมือในการพัฒนาหนังสือเล่มนี้ สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูผู้สอนวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ได้นำไปใช้หรือปรับให้เหมาะสมกับศักยภาพและความสามารถของผู้เรียน

หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง



(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีบทบาทและภารกิจในการพัฒนาครูและบุคลากรทางการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ซึ่ง สสวท. ได้จัดทำและดำเนินโครงการเพื่อพัฒนาศักยภาพของครูประจำการในสาขาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีเป็นประจำเสมอมา

สสวท. ได้เคยร่วมกับกระทรวงศึกษาธิการและทบวงมหาวิทยาลัยดำเนินการพัฒนาเอกสารชุดการเรียนการสอนสำหรับครูวิทยาศาสตร์และครูคณิตศาสตร์ เพื่อให้สถาบันการผลิตครูต่าง ๆ ได้นำไปใช้เอกสารดังกล่าวได้ถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายในระดับหนึ่ง ปัจจุบันเวลาได้ล่วงเลยมาและความก้าวหน้าทางวิชาการมีมากขึ้น สสวท. เห็นว่า ตำราและสื่อในการพัฒนาครูประจำการและการผลิตนักศึกษาครูนั้นควรได้รับการพัฒนาเพื่อให้สอดคล้องกับความก้าวหน้าทางวิชาการและเทคโนโลยีที่ก้าวหน้าขึ้นเป็นลำดับ มีมาตรฐานสูงและสามารถเทียบเคียงกับนานาชาติได้ สสวท. จึงได้ดำเนินโครงการพัฒนาตำราและสื่อสำหรับหลักสูตรการผลิตครูวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตำราวิทยาศาสตร์ศึกษาและคณิตศาสตร์ศึกษาที่จะเป็นประโยชน์ทั้งสำหรับครูประจำการและนักศึกษาครู โดยได้รับความร่วมมือจากสถาบันการผลิตครูและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาครูวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ทั่วประเทศ เพื่อให้ได้ตำราและสื่อที่มีประสิทธิภาพสูง เหมาะสมกับบริบทไทย และมีมาตรฐานทัดเทียมกับนานาชาติอีกด้วย

สำหรับตำราวิทยาศาสตร์ศึกษาและคณิตศาสตร์ศึกษาที่ สสวท. ได้พัฒนาขึ้น เป็นตำราที่ประกอบด้วยเนื้อหาพื้นฐานและแนวทางในการจัดการเรียนรู้ที่จำเป็นสำหรับครูวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยตำรา 2 ชุด ชุดหนึ่งเป็นด้านวิทยาศาสตร์ศึกษา อีกชุดหนึ่งเป็นด้านคณิตศาสตร์ศึกษา สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำราวิทยาศาสตร์ศึกษาและคณิตศาสตร์ศึกษาทั้งสองชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักศึกษาครูในการพัฒนาศักยภาพและสมรรถนะในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งจะส่งผลต่อสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนของนักเรียนและการยกระดับคุณภาพการศึกษาต่อไป



(นายพิศาล สร้อยอุห์ร่า)

ประธานโครงการพัฒนาตำราและสื่อ

สำหรับหลักสูตรการผลิตและพัฒนาครูวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี

	หน้า
• บทนำ	1
• สถานการณ์	
• รูปแบบชั้นบันได	2
• สวนฝรั่ง	8
• ทางเลือก	23
• ชั้นวางหนังสือ	28
• สเก็ตบอร์ด	32
• บันได	43
• ลูกเต๋า	48
• สามเหลี่ยม	54
• ช่างไม้	60
• โรงงาน	71
• ลูกอมสีต่าง ๆ	81
• แบบทดสอบวิทยาศาสตร์	87
• การส่งออก	92
• ขยะ	97
• แผ่นดินไหว	104
• การสนับสนุนประธานาธิบดี	110
• คดีปล้น	114
• รถยนต์ที่ดีที่สุด	123
• อัตราแลกเปลี่ยน	132
• คุยผ่านอินเทอร์เน็ต	141
• พื้นที่ทวีป	150
• สูงขึ้น	162
• รอยเท้า	171
• ความเร็วของรถแข่ง	178
• ทางเลื่อน	188
• บรรณานุกรม	199
• คณะผู้จัดทำ	202

โครงการ PISA (Programme for International Student Assessment) เป็นโครงการประเมินผลนักเรียนระดับนานาชาติ ซึ่งจะสะท้อนถึงคุณภาพของการศึกษาของประเทศไทยเมื่อเทียบกับนานาชาติ การประเมินตามโครงการ PISA เน้นการประเมินสมรรถนะของนักเรียนในการใช้ความรู้และทักษะที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงเพื่อการเรียนรู้ตลอดชีวิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งการใช้ชีวิตในสังคมยุคใหม่ นอกจากนี้ยังรวมถึงการศึกษาต่อในระดับสูง การประกอบอาชีพ และการดำเนินชีวิต โดยเริ่มทำการประเมินในปี พ.ศ. 2543 (ค.ศ. 2000) และจะประเมินทุก ๆ 3 ปี

โครงการ PISA จะประเมินสมรรถนะของนักเรียนอายุ 15 ปี โดยไม่ระบุชั้นเรียน และประเมินใน 3 ด้านหลัก ๆ ได้แก่ การรู้เรื่องการอ่าน (Reading Literacy) การรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematics Literacy) และการรู้เรื่องวิทยาศาสตร์ (Scientific Literacy) ต่อมาภายหลัง มีการประเมินเพิ่มเติมเกี่ยวกับการแก้ปัญหา (Problem Solving) และการร่วมมือกันในการแก้ปัญหา (Collaborative Problem Solving) ด้วย

การรู้เรื่องคณิตศาสตร์ในโครงการ PISA จะประเมินสมรรถนะของนักเรียนในการเลือกและประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในการจัดการกับปัญหาและแก้ปัญหาในบริบทหรือสถานการณ์ที่หลากหลาย ซึ่งต้องใช้การให้เหตุผล แนวคิด กระบวนการ ข้อเท็จจริง และเครื่องมือต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และสามารถเลือกคำตอบที่เหมาะสมและสมเหตุสมผลกับบริบทของปัญหา ซึ่งสมรรถนะการรู้เรื่องคณิตศาสตร์นี้ จะช่วยให้เข้าใจถึงบทบาทของคณิตศาสตร์ที่มีต่อโลกและสร้างพื้นฐานที่ดีให้แก่พลเมืองของโลกในการคิดและตัดสินใจอย่างสร้างสรรค์และรับผิดชอบต่อสังคม

บริบทหรือสถานการณ์ของปัญหาที่ใช้ในการประเมินการรู้เรื่องคณิตศาสตร์จะเป็นบริบทหรือสถานการณ์เกี่ยวกับบุคคล สังคม/ชุมชน อาชีพ และวิทยาการ/วิทยาศาสตร์ เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการประเมินหลัก ๆ ได้แก่ ปริมาณ (Quantity) ความไม่แน่นอนและข้อมูล (Uncertainty & Data) การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์ (Change & Relationships) และปริภูมิและรูปร่าง (Space & Shape) ซึ่งทั้งหมดนี้ต้องใช้แนวคิด (Concepts) ความรู้ (Knowledge) และทักษะทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งใช้สมรรถนะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้แก่ การสื่อสารและการสื่อความหมาย การแปลงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลและสร้างข้อสรุป กลวิธีการใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา การใช้สัญลักษณ์และภาษาทางคณิตศาสตร์ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และการใช้เครื่องมือต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

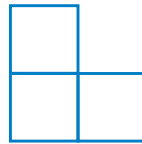
หนังสือ “ฝึก คิด พิชิตคณิต PISA” ได้นำโจทย์ปัญหาที่ใช้ในการประเมินด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ที่เผยแพร่แล้วมาเป็นตัวอย่างในการวิเคราะห์และเสนอแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา รวมทั้งเสนอแนะโจทย์ปัญหาเพิ่มเติมเพื่อให้ครูและนักเรียน ได้เห็นแนวทางในการฝึกฝนการคิดแก้โจทย์ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อฝึกให้นักเรียนคิด วิเคราะห์ และสามารถแก้โจทย์ปัญหาในสถานการณ์ที่หลากหลายได้ ซึ่งเป็นหนทางหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาตามแนวทางของการประเมินการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ในโครงการ PISA

รูปแบบขั้นบันได

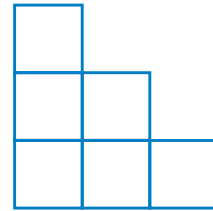
- เรวัตสร้างรูปแบบขั้นบันไดโดยใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูป



ขั้น 1



ขั้น 2



ขั้น 3

- จะเห็นว่าเขาใช้รูปสี่เหลี่ยมหนึ่งรูปสำหรับบันได 1 ขั้น สามรูปสำหรับบันได 2 ขั้น และหกรูปสำหรับบันได 3 ขั้น

คำถามที่ 1 : รูปแบบขั้นบันได

เขาจะต้องใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนกี่รูป เพื่อสร้างบันได 4 ขั้น

คำตอบ:รูป

คะแนนเต็ม

ตอบ 10

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ

แขนงวิชา : -

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	87.59
เกาหลี	79.82
ฮ่องกง-จีน	83.00
มาเก๊า-จีน	80.45
ไทย	70.69



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

ในสถานการณ์นี้ กล่าวถึงแบบรูปของชั้นบันไดที่แสดงความสัมพันธ์ด้วยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมาเรียงกันในลักษณะชั้นบันไดซึ่งถือว่าเป็นแบบรูปทางเรขาคณิตที่นำไปสู่แบบรูปของจำนวนที่นักเรียนสามารถระบุจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของบันได 4 ชั้นได้ โดยการสังเกตจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เพิ่มขึ้นในแต่ละชั้น สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถในด้านความรู้สึกเชิงจำนวนและความรู้สึกเชิงปริภูมิ อาจระบุรูปทั่วไปของแบบรูปนี้ได้ ซึ่งการเรียนรู้เกี่ยวกับแบบรูปลักษณะนี้มีความสอดคล้องกับแนวทางการจัดการเรียนรู้ในหลักสูตรปัจจุบัน



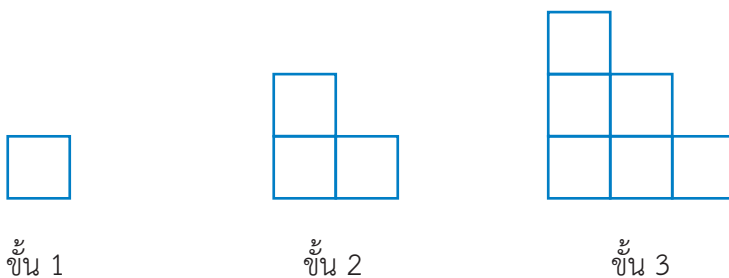
ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ความสามารถที่นักเรียนต้องใช้ในการตอบคำถาม คือความสามารถในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เพื่อหาแบบรูป ซึ่งนักเรียนต้องอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวนและความรู้สึกเชิงปริภูมิประกอบกัน

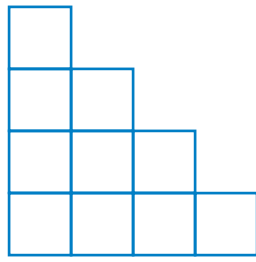


แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

คำถามที่ 1 เขาจะต้องใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนกี่รูป เพื่อสร้างบันได 4 ชั้น
แนวคิด 1



จากรูปข้างต้น และคำสั่งให้หาจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดในการสร้างบันได 4 ชั้น จากแบบรูปที่สังเกตเห็น นักเรียนสามารถเขียนรูปในขั้น 4 ต่อจากรูปในขั้น 3 โดยเขียนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสี่รูปเรียงกันต่อจากขั้น 3 ดังรูป



ชั้น 4

เมื่อนับจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ใช้ พบว่า
จะต้องใช้จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด 10 รูป

แนวคิด 2

วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูป จะได้ดังนี้

ชั้น 1 ใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1 รูป

ชั้น 2 ใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพิ่ม 2 รูป รวมเป็น $1 + 2$ รูป

ชั้น 3 ใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพิ่ม 3 รูป รวมเป็น $1 + 2 + 3$ รูป

ชั้น 4 ใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพิ่ม 4 รูป รวมเป็น $1 + 2 + 3 + 4$ รูป

ดังนั้น ชั้น 4 จะมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ รูป



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในแบบรูปที่กำหนดให้ มีความสำคัญที่นำไปสู่การเรียนรู้เรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในรูปของนิพจน์ หรือสมการที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาหรือตอบคำถามในโจทย์ทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และสาขาอื่นที่เกี่ยวข้องได้ ดังนั้น ครูควรให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการทำโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปให้มากขึ้นและสม่ำเสมอเท่าที่มีโอกาสจะสอดแทรกได้ สำหรับสถานการณ์โจทย์ปัญหารูปแบบขั้นบันไดนี้ นักเรียนไทยจำนวนมากถึง 70.69 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ สามารถหาคำตอบได้ถูกต้อง แต่ก็ยังมีจำนวนน้อยกว่าชาติอื่น ๆ ปัจจัยหนึ่งที่ทำให้นักเรียนไทยทำโจทย์ข้อนี้ได้เป็นจำนวนมาก อาจเป็นเพราะเป็นแบบรูปที่ง่ายต่อการหาคำตอบประกอบกับในหลักสูตรคณิตศาสตร์แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดเรื่องของแบบรูปให้นักเรียนทุกระดับชั้นได้เรียนรู้ จึงทำให้นักเรียนมีประสบการณ์และมีทักษะเพียงพอที่จะแก้ปัญหาลักษณะนี้ได้ แต่ครูก็ยังคงต้องคำนึงถึงการสอดแทรกและตระหนักถึงความสำคัญของแบบรูปที่จะเชื่อมโยงไปสู่การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และพัฒนาความสามารถในด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการให้เหตุผลด้วย



2. ครูอาจใช้สถานการณ์นี้เป็นคำถามที่ 1 เพื่อให้นักเรียนหาจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ประกอบเป็นบันไดในชั้น 5 หรืออาจข้ามไปหาในชั้น 10 เลยก็ได้ ทั้งนี้ครูอาจให้นักเรียนเข้ากลุ่มช่วยกันระดมความคิด หาแนวคิดที่จะหาคำตอบได้เร็วกว่าการนับต่อไปเรื่อย ๆ

ครูอาจถือโอกาสแนะนำให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอย่างเป็นระบบง่ายต่อการมองเห็นคำตอบได้เร็วขึ้น ตลอดจนสามารถเขียนความสัมพันธ์ในชั้น n เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ได้ดังนี้

จำนวนชั้นบันได	จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	
1	1	= 1
2	1 + 2	= 3
3	1 + 2 + 3	= 6
4	1 + 2 + 3 + 4	= 10
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$	$= \frac{n(n+1)}{2}$

◆ ครูอาจตั้งเป็นคำถามที่ 2 ดังนี้

คำถามที่ 2 เรวัตจะต้องใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นกี่รูปในการสร้างบันได 12 ชั้น
ต่อบันได 4 ชั้น

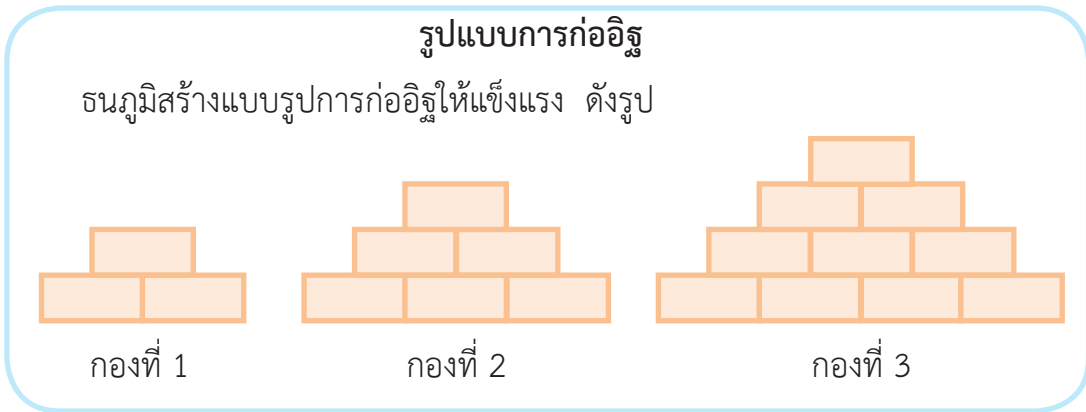
แนวคิด จากการวิเคราะห์แบบรูป จะได้ว่า ในการสร้างบันได 12 ชั้น จะต้องใช้รูป
สี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นจากบันได 4 ชั้น

$$\begin{aligned}
 &\text{เท่ากับ } (1 + 2 + 3 + \dots + 12) - (1 + 2 + 3 + 4) \text{ รูป} \\
 &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \text{ รูป} \\
 &= 68 \text{ รูป}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น เรวัตจะต้องใช้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มอีก 68 รูป



ครูอาจให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในเรื่องแบบรูปเพิ่มเติม เพื่อพัฒนาการนำความรู้สึกเชิงปริภูมิและความรู้สึกเชิงจำนวนมาใช้ประกอบการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของแบบรูป โดยอาจใช้ตัวอย่างต่อไปนี้



- คำถามที่ 1** อนุกรมจะต้องใช้อิฐกี่ก้อนในการก่อกองอิฐกองที่ 4
- แนวคิด วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปจะได้ ดังนี้
- กองที่ 1 มี 2 แถว ใช้ก้อนอิฐ $1 + 2 = 3$
- กองที่ 2 มี 3 แถว ใช้ก้อนอิฐ $1 + 2 + 3 = 6$
- กองที่ 3 มี 4 แถว ใช้ก้อนอิฐ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- กองที่ 4 มี 5 แถว ใช้ก้อนอิฐ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- ดังนั้น อนุกรมจะต้องใช้ก้อนอิฐในการก่อกองอิฐกองที่ 4 จำนวน 15 ก้อน

- คำถามที่ 2** อนุกรมจะต้องใช้อิฐกี่ก้อนในการก่อกองอิฐกองที่ 10
- แนวคิด วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปของการก่ออิฐกองที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนนับได้ดังนี้

กองที่	จำนวนแถวของกองอิฐ	จำนวนอิฐในแต่ละกอง
1	2	$1 + 2 = 3$
2	3	$1 + 2 + 3 = 6$
3	4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
n	$n+1$	$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

ดังนั้น อนุกรมจะต้องใช้อิฐในการก่อกองอิฐกองที่ 10 เท่ากับ $\frac{(10+1)(10+2)}{2} = 66$ ก้อน



คำถามที่ 3 ถ้าธนภูมิมีอิฐ 200 ก้อนเขาจะก่อกองอิฐในแบบรูปนี้ได้สูงที่สุดกี่ชั้น และมีอิฐเหลือกี่ก้อน

สมมติให้แถวที่ n ของแบบรูปนี้มีจำนวนอิฐประมาณ 200 ก้อน

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 200$$

จะได้ $(n+1)(n+2) = 400$

เราสามารถหาจำนวนนับ n ได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 จาก $(n+1)(n+2) = 400$

$$n^2 + 3n + 2 = 400$$

$$n^2 + 3n - 398 = 0$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-398)}}{2}$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{1601}}{2}$$

$$n \approx \frac{-3 \pm 40}{2}$$

$$n \approx -21.5, 18.5$$

แต่เนื่องจาก n ต้องเป็นจำนวนนับ

ดังนั้น $n = 18$

วิธีที่ 2 จาก $(n+1)(n+2) = 400$

เนื่องจาก $n+1$ กับ $n+2$ เป็นจำนวนนับที่ต่างกันอยู่ 1 ทดลองนำจำนวนนับสองจำนวนที่มากที่สุดซึ่งต่างกันหนึ่ง แล้วผลคูณไม่เกิน 400 เช่น $20 \times 21 = 420$ ซึ่งใช้ไม่ได้เพราะผลคูณมากกว่า 400 ทดลองนำจำนวนนับสองจำนวนที่มากที่สุดคู่ใหม่ที่ต่างกันหนึ่งแล้วผลคูณไม่เกิน 400

จะได้ $(n+1)(n+2) = 19 \times 20 = 380$

จะได้ $n+1 = 19$ หรือ $n+2 = 20$

ดังนั้น $n = 18$

โจทย์ข้อนี้ต้องการทราบว่าธนภูมิจะกองอิฐได้สูงที่สุดกี่ชั้น จากการคำนวณหาจำนวนนับ n ทั้งสองวิธี ได้ $n = 18$ แสดงว่ากองที่ 18 ก่อกองอิฐ ในแบบรูปนี้ได้สูงที่สุด 19 ชั้น ซึ่งใช้อิฐ

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(18+1)(18+2)}{2}$$

$$= 190 \text{ ก้อน}$$

จะเหลือก้อนอิฐเท่ากับ $200 - 190 = 10$ ก้อน

ดังนั้น ธนภูมิจะก่อกองอิฐในแบบรูปนี้ได้สูงที่สุด 19 ชั้น และมีอิฐเหลือ 10 ก้อน

สวนฝรั่ง



ชาวสวนปลูกฝรั่งในแปลงปลูกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นอกจากนี้ยังปลูกต้นสนไว้รอบ ๆ แปลงฝรั่ง เพื่อป้องกันลมด้วย แผนผังในรูปต่อไปนี้แสดงแปลงฝรั่งดังกล่าว โดย n คือ จำนวนแถวของต้นฝรั่ง

$n = 1$

```
x x x
x ● x
x x x
```

x แทน ต้นสน

● แทน ต้นฝรั่ง

$n = 2$

```
x x x x x
x ● ● x
x     x
x ● ● x
x x x x x
```

$n = 3$

```
x x x x x x x
x ● ● ● x
x     x
x ● ● ● x
x     x
x ● ● ● x
x x x x x x x
```

$n = 4$

```
x x x x x x x x
x ● ● ● ● x
x     x
x ● ● ● ● x
x     x
x ● ● ● ● x
x     x
x ● ● ● ● x
x x x x x x x x
```

คำถามที่ 1: สวนฝรั่ง

เติมข้อมูลลงในตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

n	จำนวนของต้นฝรั่ง	จำนวนของต้นสน
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : พีชคณิต

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

คะแนนเต็ม

เติมข้อมูลในตารางได้ถูกต้องทั้ง 7 แห่ง ดังนี้

n	จำนวนของต้นฝรั่ง	จำนวนของต้นสน
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	81.50
เกาหลี	73.40
ฮ่องกง-จีน	78.10
ไทย	18.29

ได้คะแนนบางส่วน

มีคำตอบผิดหรือไม่ตอบ 1 แห่ง

ไม่มีคะแนน

มีคำตอบผิดหรือไม่ตอบมากกว่า 1 แห่ง

นักเรียนสามารถคำนวณหาจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสนโดยใช้สูตร 2 สูตร ต่อไปนี้

$$\text{จำนวนของต้นฝรั่ง} = n^2$$

$$\text{จำนวนของต้นสน} = 8n$$

เมื่อ n คือ จำนวนแถวของต้นฝรั่ง จะมีค่าของ n อยู่ค่าหนึ่งที่จำนวนของต้นฝรั่งจะเท่ากับจำนวนของต้นสน

คำถามที่ 2 : สวนฝรั่ง

จงหาค่าของ n นั้น โดยแสดงวิธีคำนวณด้วย

.....
.....

คะแนนเต็ม

- คำตอบถูก คือ $n = 8$ และแสดงวิธีคิดถูกหรือไม่ก็ได้ ดังนี้
 - $n^2 = 8n$, $n^2 - 8n = 0$, $n(n - 8) = 0$, $n = 0$ และ 8 ดังนั้น $n = 8$
 - $n^2 = 8^2 = 64$, $8n = 8 \times 8 = 64$
 - $n^2 = 8n$ ดังนั้น $n = 8$
 - $8 \times 8 = 64$, $n = 8$
 - $n = 8$
 - $8 \times 8 = 8^2$
- อาจใช้วิธีคิดต่างออกไป ได้คำตอบ 2 คำตอบ คือ $n = 8$ และ $n = 0$ ก็ได้
 - $n^2 = 8n$, $n^2 - 8n = 0$, $n(n - 8) = 0$, $n = 0$ และ $n = 8$
- อาจใช้วิธีเขียนรูปขยายออกไป และได้คำตอบ $n = 8$ ก็ได้

ไม่มีคะแนน

- คำตอบอื่น ๆ รวมทั้งคำตอบ $n = 0$ อย่างเดียว
- $n^2 = 8n$ (เขียนประโยคซ้ำกับคำถาม)
 - $n^2 = 8$
 - $n = 0$ ตอบคำตอบเดียวไม่ได้เพราะทุก ๆ ต้นฝรั่ง 1 ต้น จะมีต้นสน 8 ต้น

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟิสิกส์คณิต

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	50.80
เกาหลี	60.60
ฮ่องกง-จีน	56.40
ไทย	10.56

คำถามที่ 3 : สวนฝรั่ง

สมมุติว่าเจ้าของสวนต้องการขยายสวนให้ใหญ่ขึ้น โดยเพิ่มจำนวนแถวของต้นไม้ให้มากขึ้น เมื่อสวนขยายใหญ่ขึ้น จงหาว่าจำนวนของต้นฝรั่งหรือจำนวนของต้นสนอย่างไหนจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากัน และอธิบายว่านักเรียนคิดหาคำตอบอย่างไรด้วย

.....
.....

คะแนนเต็ม

คำตอบถูกต้องตามด้วยคำอธิบายที่สมเหตุสมผล ตัวอย่างเช่น

- จำนวนต้นฝรั่ง = $n \times n$ และจำนวนต้นสน = $8 \times n$ ทั้งสองสูตรนี้มี n เป็นตัวประกอบ แต่จำนวนต้นฝรั่งมี n อีกหนึ่งตัว ซึ่งจะทำให้มีจำนวนมากขึ้น ในขณะที่ 8 ยังคงเป็นตัวประกอบเดิม คือ จำนวนของต้นฝรั่งจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่า
- จำนวนต้นฝรั่งเพิ่มขึ้นเร็วกว่า เพราะจำนวนต้นฝรั่งเพิ่มเป็นกำลังสอง แทนที่จะคูณด้วย 8
- จำนวนต้นฝรั่งเป็นสมการกำลังสอง จำนวนต้นสนเป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นจำนวนต้นฝรั่งจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่า
- ตอบโดยอาศัยกราฟ เพื่อแสดงว่า n^2 มีค่ามากกว่า $8n$ เมื่อ n มากกว่า 8
[ให้ลูกค้านักเรียนอธิบายในเชิงพีชคณิตอยู่บนพื้นฐานของสูตร n^2 และ $8n$]

ได้คะแนนบางส่วน

คำตอบถูกต้อง อยู่บนพื้นฐานของการยกตัวอย่างเป็นเฉพาะกรณีไป หรือเติมข้อมูลในตารางออกไปอีก

- จำนวนต้นฝรั่งจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เพราะจากข้อมูลในตารางจะเห็นว่า จำนวนต้นฝรั่งเพิ่มขึ้นเร็วกว่าจำนวนต้นสน กรณีนี้เกิดขึ้นภายหลังจากจำนวนต้นฝรั่งและจำนวนต้นสนเท่ากันแล้ว
 - จากข้อมูลในตารางแสดงให้เห็นว่า จำนวนต้นฝรั่งเพิ่มขึ้นเร็วกว่า
- หรือ คำตอบถูกต้อง รู้ถึงความสัมพันธ์บางประการระหว่าง n^2 และ $8n$ ที่ละไว้ในฐานที่เข้าใจ หลังจาก $n > 8$
- หลังจาก 8 แถวแล้ว จำนวนต้นฝรั่งจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่าจำนวนต้นสน
 - จนกว่าต้นสนจะครบ 8 แถวแล้ว จำนวนต้นฝรั่งจึงจะมากกว่า

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : พีชคณิต

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ไม่มีคะแนน

คำตอบถูกต้อง แต่ไม่อธิบาย หรืออธิบายไม่เพียงพอ หรืออธิบายผิด เช่น

- ต้นฝรั่ง
 - ต้นฝรั่ง ที่อยู่ภายในมากกว่าต้นฝรั่งที่อยู่รอบ ๆ ด้านนอก
 - ต้นฝรั่ง เพราะถูกล้อมรอบด้วยต้นสน
- หรือ คำตอบที่ไม่ถูกต้องอื่น ๆ เช่น
- ต้นสน
 - ต้นสน เพราะทุกครั้งที่เพิ่มแถวของต้นฝรั่ง ท่านต้องใช้ต้นสนเป็นจำนวนมาก
 - ต้นสน เพราะต้นฝรั่งทุก ๆ ต้น มีต้นสน 8 ต้น
 - ข้าพเจ้าไม่ทราบ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	21.10
เกาหลี	30.40
ฮ่องกง-จีน	26.80
ไทย	2.28

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ในโจทย์ข้อนี้ กำหนดแบบรูปของการปลูกต้นฝรั่งในแปลงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยปลูกต้นฝรั่งเป็นแถว ๆ จำนวนต้นฝรั่งในแต่ละแถวเท่ากับจำนวนแถวของต้นฝรั่งที่ปลูก นอกจากนี้ยังปลูกต้นสนไว้รอบ ๆ แปลงฝรั่งเพื่อป้องกันลมตามแผนผังที่โจทย์กำหนดแบบรูปของแปลงปลูกต้นฝรั่งที่กำหนดให้ n เป็นจำนวนแถวของต้นฝรั่ง เมื่อ $n = 1, 2, 3$ และ 4 เป็นดังนี้

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & \bullet & \times \\ \times & \times & \times \end{array}$	$\begin{array}{cccc} \times & \times & \times & \times \\ \times & \bullet & \bullet & \times \\ & \times & & \times \\ \times & \bullet & \bullet & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}$	$\begin{array}{cccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & & & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & & & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & & & \times \\ \times & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \times \\ & \times & & & & & & & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}$
$\times$ แทน ต้นสน $\bullet$ แทน ต้นฝรั่ง			

โจทย์ให้ข้อสังเกตเกี่ยวกับจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสน จากแบบรูป 2 แบบรูป คือ จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับ n^2 และจำนวนของต้นสนเท่ากับ $8n$ เมื่อ n คือจำนวนแถวของต้นฝรั่ง แล้วโจทย์ให้แสดงวิธีหาว่า n เป็นเท่าใด ที่ทำให้จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับจำนวนของต้นสนหรือ $n^2 = 8n$

นอกจากนี้ โจทย์ให้วิเคราะห์ต่อว่า เมื่อแปลงต้นฝรั่งขยายใหญ่ขึ้นตามแบบรูปที่กำหนดให้ จำนวนของต้นฝรั่งหรือจำนวนของต้นสนอย่างไหนจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากัน โดยให้อธิบายที่มาของคำตอบด้วย



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการตอบคำถามที่ 1 นักเรียนจะต้องสังเกตจากแบบรูปการปลูกต้นฝรั่งและต้นสน เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ แล้วเติมจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสนที่นับได้จากแบบรูปลงในตารางที่โจทย์กำหนดให้

ในการตอบคำถามที่ 2 โจทย์ให้หาค่า n เมื่อ $n^2 = 8n$ นักเรียนอาจใช้วิธีแก้สมการกำลังสองหรือลองแทนค่า n ที่สอดคล้องกับสมการก็สามารถหาคำตอบได้หรืออาจใช้วิธีเขียนรูปขยายออกไปจนถึง $n = 8$ ก็ได้

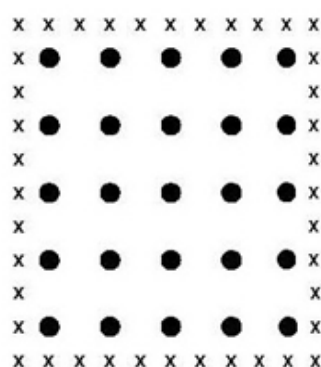


สำหรับคำถามที่ 3 โจทย์ต้องการให้หาว่า เมื่อสวนขยายใหญ่ขึ้น จำนวนของต้นฝรั่งหรือจำนวนของต้นสนอย่างไหนจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากัน ให้อธิบายวิธีคิดประกอบจำนวนต้นฝรั่ง เท่ากับ n^2 และจำนวนต้นสน เท่ากับ $8n$ เมื่อ n เป็นจำนวนแถวของต้นฝรั่ง โดยนักเรียนอาจหาจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสน เมื่อ n เพิ่มขึ้น โดยใช้ความรู้สึกเชิงจำนวน หรือ อาจใช้ความรู้เรื่องอสมการและสมการพิจารณาในกรณีที่ $n < 8$, $n = 8$ และ $n > 8$ หรือ นักเรียนอาจใช้ความรู้เรื่องกราฟ เขียนกราฟแสดงการเพิ่มของจำนวนต้นฝรั่งจากสมการ $y = n^2$ และจากสมการ $y = 8n$ เมื่อ n เป็นจำนวนแถวของต้นฝรั่ง และ y แทนจำนวนของต้นไม้ (อาจเป็นต้นฝรั่งหรือต้นสนก็ได้) แล้วเปรียบเทียบกราฟทั้งสองที่ได้



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

คำถามที่ 1 ให้เติมจำนวนของต้นฝรั่งและต้นสนลงในตารางเมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ โดยเขียนแผนผัง เมื่อ $n = 5$ ตามแบบรูปที่ให้มา ได้ดังนี้



เมื่อนับจำนวนของต้นฝรั่งและต้นสนจากแผนผัง แล้วเติมจำนวนที่ได้ลงในตารางได้ดังนี้

n	จำนวนของต้นฝรั่ง	จำนวนของต้นสน
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40



คำถามที่ 2

นักเรียนสามารถคำนวณหาจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสนโดยใช้สูตร 2 สูตร ต่อไปนี้

จำนวนของต้นฝรั่ง เท่ากับ n^2

จำนวนของต้นสน เท่ากับ $8n$

เมื่อ n คือ จำนวนแถวของต้นฝรั่ง จะมีค่าของ n อยู่ค่าหนึ่งที่จำนวนของต้นฝรั่งจะเท่ากับจำนวนของต้นสน

จงหาค่าของ n นั้น โดยแสดงวิธีคำนวณด้วย

แนวคิด 1

หาค่าของ n ที่จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับจำนวนของต้นสน

จากสมการ $n^2 = 8n$

นำ $8n$ ลบทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } n^2 - 8n = 8n - 8n$$

$$n^2 - 8n = 0$$

$$n(n - 8) = 0$$

$$n = 0 \text{ หรือ } n - 8 = 0$$

นั่นคือ $n = 0$ หรือ $n = 8$

แต่เนื่องจาก n เป็นจำนวนแถวของต้นฝรั่ง

ดังนั้น n เป็นจำนวนนับ n จึงไม่เท่ากับ 0

นั่นคือ $n = 8$

ตรวจสอบ

แทน n ด้วย 8 จะได้จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับ $n^2 = 8^2 = 64$ และจะได้จำนวนของต้นสนเท่ากับ $8n = 8 \times 8 = 64$ ซึ่งเท่ากัน

ดังนั้น เมื่อ $n = 8$ จะได้จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับจำนวนของต้นสน

แนวคิด 2

ใช้วิธีลองแทนค่า n ด้วยจำนวนนับ 1, 2, 3, ... จนกว่าจะได้ n^2 และ $8n$ เท่ากัน

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
$8n$	8	16	24	32	40	48	56	64

จากตารางข้างต้น จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับจำนวนของต้นสน เท่ากับ 64 เมื่อจำนวนแถวของต้นฝรั่งเป็น 8

ดังนั้น จำนวนของต้นฝรั่งเท่ากับจำนวนของต้นสน เมื่อ $n = 8$ นั่นคือ $n = 8$



แนวคิด 3 ใช้วิธีเขียนรูปขยายออกไปจาก $n = 4$ เป็น $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$ และ $n = 8$ ในแต่ละ n ก็นับจำนวนของต้นฝรั่งและต้นสนเปรียบเทียบกันไปเรื่อย ๆ ในที่สุดจะได้ว่า $n = 8$ เป็นคำตอบที่ต้องการหา

คำถามที่ 3 เมื่อขยายสวนให้ใหญ่ขึ้น จงหาว่าจำนวนของต้นฝรั่งหรือจำนวนของต้นสนอย่างไรจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากัน และอธิบายว่านักเรียนคิดหาคำตอบอย่างไรด้วย

แนวคิด 1 พิจารณาจากสูตร 2 สูตร ต่อไปนี้
จำนวนของต้นฝรั่ง เท่ากับ n^2
จำนวนของต้นสน เท่ากับ $8n$
เมื่อ n คือ จำนวนแถวของต้นฝรั่ง

จากคำถามที่ 2 พบว่า เมื่อ $n = 8$ ทำให้ $n^2 = 8n$ ดังนั้น จึงควรพิจารณาใน 2 กรณี คือ $n < 8$ และ $n > 8$ ดังนี้

กรณีที่ 1 $n < 8$ คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย n และเนื่องจาก $n > 0$ จะได้ $n \times n < 8 \times n$ หรือ $n^2 < 8n$
ดังนั้น ถ้าจำนวนแถวของฝรั่งน้อยกว่า 8 จะได้จำนวนของต้นฝรั่งน้อยกว่าจำนวนของต้นสน

กรณีที่ 2 $n > 8$ คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย n และเนื่องจาก $n > 0$ จะได้ $n \times n > 8n$ หรือ $n^2 > 8n$
ดังนั้น ถ้าจำนวนแถวของต้นฝรั่งมากกว่า 8 จะได้จำนวนของต้นฝรั่งมากกว่าจำนวนของต้นสน

จากกรณีทั้ง 2 จะเห็นว่า ถ้าสวนฝรั่งขยายใหญ่ขึ้นมากกว่า 8 แถว จะได้จำนวนของต้นฝรั่งเพิ่มขึ้นเร็วกว่าจำนวนของต้นสน

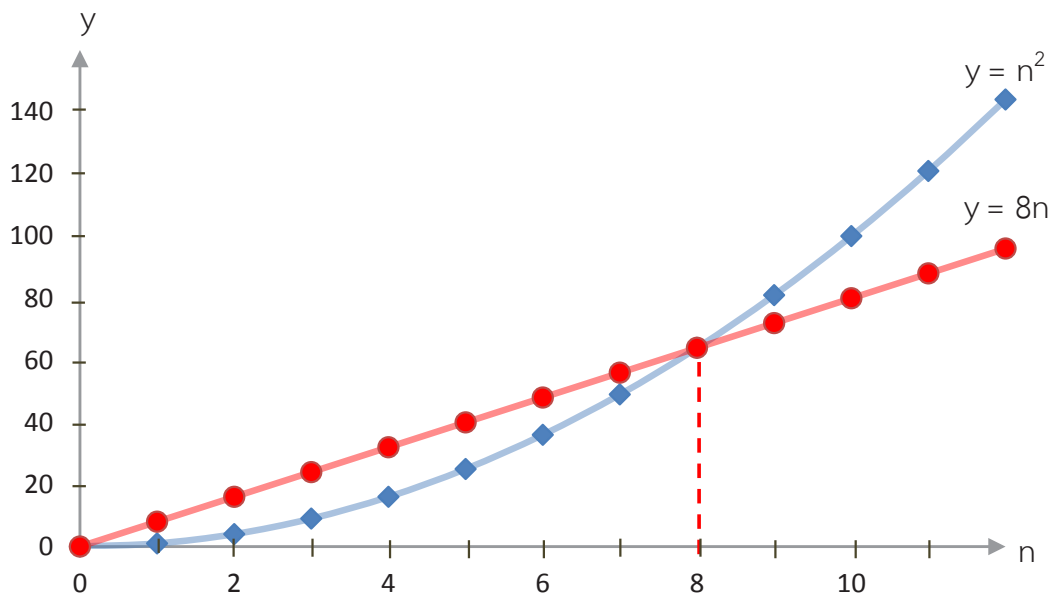
แนวคิด 2 พิจารณาโดยใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนจากสูตร 2 สูตร ต่อไปนี้
จำนวนของต้นฝรั่ง เท่ากับ n^2
จำนวนของต้นสน เท่ากับ $8n$
เมื่อ n แทนจำนวนแถวของต้นฝรั่ง
เนื่องจาก $n^2 = n \times n$
และ $8n = 8 \times n$
ดังนั้น ถ้า n เพิ่มขึ้นมากกว่า 8 แล้ว $n \times n$ ย่อมมากกว่า $8 \times n$ เสมอ
นั่นคือ ถ้าสวนฝรั่งขยายใหญ่ขึ้นมากกว่า 8 แถว จำนวนของต้นฝรั่งเพิ่มขึ้นเร็วกว่าจำนวนของต้นสน

ดังนั้น เมื่อสวนฝรั่งขยายใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ จนจำนวนแถวของต้นฝรั่งมากกว่า 8 จำนวนของต้นฝรั่งจะเพิ่มขึ้นเร็วกว่าจำนวนของต้นสน ซึ่งสามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

ถ้า $n > 8$ แล้ว $n \times n > 8n$ หรือ $n^2 > 8n$ เสมอ

แนวคิด 3

จากสูตรจำนวนของต้นไม้แฟรงก์ เท่ากับ n^2
และ จำนวนของต้นไม้สน เท่ากับ $8n$
เมื่อ n คือ จำนวนแถวของต้นไม้แฟรงก์
ให้ y แทนจำนวนของต้นไม้
เขียนกราฟของ $y = n^2$ และ $y = 8n$ ได้ดังนี้



จากกราฟข้างต้นจะเห็นว่า เมื่อ $n > 8$ กราฟของ $y = n^2$ จะเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากราฟของ $y = 8n$ แสดงว่าจำนวนของต้นไม้แฟรงก์เพิ่มขึ้นเร็วกว่าจำนวนของต้นไม้สน เมื่อขนาดของสวนแฟรงก์ขยายใหญ่ขึ้นโดยจำนวนแถวมากกว่า 8 แถว



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

ในการตอบคำถามที่ 1 ถ้านักเรียนพยายามหาสูตรเพื่อหาจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสน นักเรียนอาจประสบปัญหาอยู่บ้าง อย่างไรก็ตามถ้านักเรียนใช้วิธีนับจำนวนของต้นฝรั่งและจำนวนของต้นสนจากแผนผัง นักเรียนก็สามารถตอบคำถามที่ 1 ได้ไม่ยาก แต่ปรากฏว่ามีนักเรียนไทยไม่ถึง 20 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้อง แสดงว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถเขียนแผนผังของจำนวนของต้นสนและจำนวนของต้นฝรั่ง เมื่อ $n = 5$ เพื่อนำมาเติมในตารางได้ถูกต้อง ซึ่งอาจเป็นไปได้ว่านักเรียนมองไม่เห็นแบบรูปของการปลูกต้นฝรั่งและต้นสน

สำหรับการตอบคำถามที่ 2 ให้หาค่าของ n ที่ทำให้ $n^2 = 8n$ ซึ่งเป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว นักเรียนได้เรียนเรื่องนี้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 ซึ่งมีนักเรียนบางคน que เลือกเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเท่านั้น ที่ได้ผ่านการเรียนเรื่องนี้มาก่อน อาจเป็นเหตุให้นักเรียนไทยส่วนน้อย คือ ประมาณ 10 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้อง อาจเป็นไปได้ว่านักเรียนที่ตอบถูกใช้วิธีลองแทนค่าของ n ในสมการ $n^2 = 8n$ ซึ่งถ้าใช้การแทนค่าในใจก็จะใช้เวลาไม่มากนัก แต่นักเรียนอาจนึกไม่ถึงว่าอาจใช้วิธีเขียนรูปขยายออกไปตามแบบรูปที่ให้มาก็ได้

สำหรับการตอบคำถามที่ 3 นักเรียนควรเลือกตอบคำถามโดยใช้แนวคิด 1 หรือแนวคิด 2 สำหรับแนวคิด 3 นั้นอาจเป็นวิธีที่ทำให้เสียเวลามากเกินไปในการทำข้อสอบ มีจำนวนนักเรียนไทยน้อยมากที่ตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้อง คือ มีเพียง 2.28 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ แสดงว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่คุ้นเคยกับการตอบคำถามประเภทปลายเปิดเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์ ซึ่งต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ที่การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์มักละเลยกันในเรื่องนี้

จากผลการตอบคำถามทั้งสามข้อข้างต้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังขาดประสบการณ์ในการทำโจทย์เกี่ยวกับแบบรูปต่าง ๆ ที่ซับซ้อนขึ้นจึงตอบคำถามไม่ได้ หรือไม่ได้ตอบคำถาม

ปัจจุบันครูคณิตศาสตร์จำนวนมากยังไม่ค่อยตระหนักถึงความสำคัญของแบบรูปที่มีอยู่มากในสิ่งแวดล้อม เราโชคดีที่หลายสิ่งหลายอย่างในโลกนี้มีลักษณะความสัมพันธ์กันเป็นแบบรูป ทำให้สามารถกำหนดตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์ คาดการณ์ถึงผลที่เกิดในอดีต ปัจจุบัน และอนาคต ทำให้สามารถเตรียมการรับมือกับผลลัพธ์ต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นได้ดี สามารถใช้เทคโนโลยีมาประยุกต์ใช้ทำให้การดำเนินชีวิตมีประสิทธิภาพและคุณภาพมากขึ้น เรื่องเกี่ยวกับแบบรูปและความสัมพันธ์ของแบบรูปเป็นเรื่องที่กำหนดไว้ในหลักสูตรแกนกลางคณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2551 ไว้อย่างชัดเจนในสาระที่ 4 พีชคณิต มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และได้กำหนด ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางไว้ตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยแทรกสาระไว้ในเรื่องสมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และในเรื่องอสมการชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ถ้าครูได้จัดการเรียนรู้ตามมาตรฐานหลักสูตรและตัวชี้วัดดังกล่าวอย่างเหมาะสม โดยปูพื้นฐานและให้นักเรียนมีประสบการณ์อย่างเพียงพอในการทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้ นักเรียนน่าจะไม่มีปัญหาทำโจทย์ในทำนองนี้ แต่ในการจัดการเรียนการสอนในระดับมัธยมศึกษา นักเรียนยังขาดประสบการณ์ในการวิเคราะห์แบบรูปอย่างหลากหลายโดยเฉพาะแบบรูปที่เป็นรูปเรขาคณิตมากกว่าหนึ่งชนิด ดังเช่นโจทย์สถานการณ์เรื่องสวนฝรั่ง ยังมีแบบรูปที่สามารถนำมาใช้พัฒนาความคิดวิเคราะห์ของนักเรียนอีกมากที่ครูผู้สอนสามารถนำมาให้นักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์ จะขอยกตัวอย่างต่าง ๆ รวมทั้งสถานการณ์บางสถานการณ์ที่ครูสามารถนำมาปรับใช้ได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดแบบรูปที่ใช้ชิ้นส่วนที่มีลักษณะ $\triangle$, $\diamond$ และ ∇ ในการออกแบบ
จงสำรวจและวิเคราะห์แบบรูปดังกล่าวแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

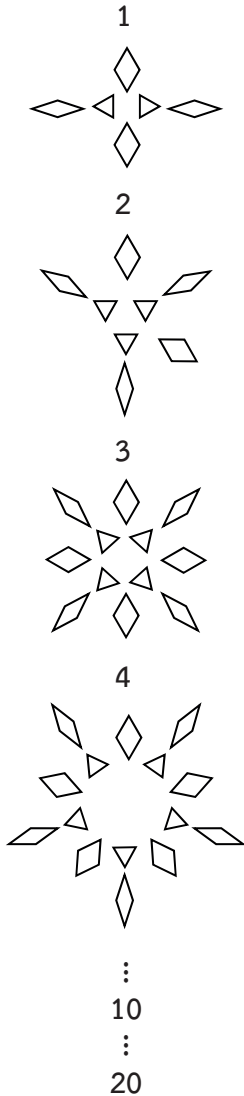


คำถามที่ 1

มี $\triangle$, $\diamond$ และ ∇ อย่างละกี่ชิ้น

ในการออกแบบครั้งที่ 39 ของแบบรูปที่กำหนดให้
และจะต้องใช้ชิ้นส่วนในการออกแบบทั้งหมดกี่ชิ้น
พิจารณาจำนวนชิ้นของ $\triangle$, $\diamond$ และ ∇
ในการออกแบบแต่ละครั้งตามลำดับ ดังนี้

แนวคิด



ครั้งที่	จำนวน $\triangle$	จำนวน $\diamond$	จำนวน ∇
1	2	2	2
2	3	3	3
3	4	4	4
4	5	5	5
5	6	6	6
⋮	⋮	⋮	⋮
n	n + 1	n + 1	n + 1

รวมจำนวนชิ้นส่วนทั้ง 3 ชนิดในการออกแบบ
ครั้งที่ n เท่ากับ $3(n + 1)$ ชิ้น

ดังนั้น ในการออกแบบครั้งที่ 39

จะมี $\triangle$ จำนวน $39 + 1$ ชิ้น หรือ 40 ชิ้น

$\diamond$ จำนวน $39 + 1$ ชิ้น หรือ 40 ชิ้น

∇ จำนวน $39 + 1$ ชิ้น หรือ 40 ชิ้น

นั่นคือ จะต้องใช้ชิ้นส่วนทั้งสามรูปแบบรวมเป็น

$$3 \times 40 = 120 \text{ ชิ้น}$$



คำถามที่ 2

เป็นไปได้หรือไม่ที่ในการออกแบบครั้งหนึ่งจำนวนชิ้นของ $\triangle$, $\diamond$ และ ∇
รวมกันเป็น 100 ชิ้น จงให้เหตุผลประกอบคำตอบ

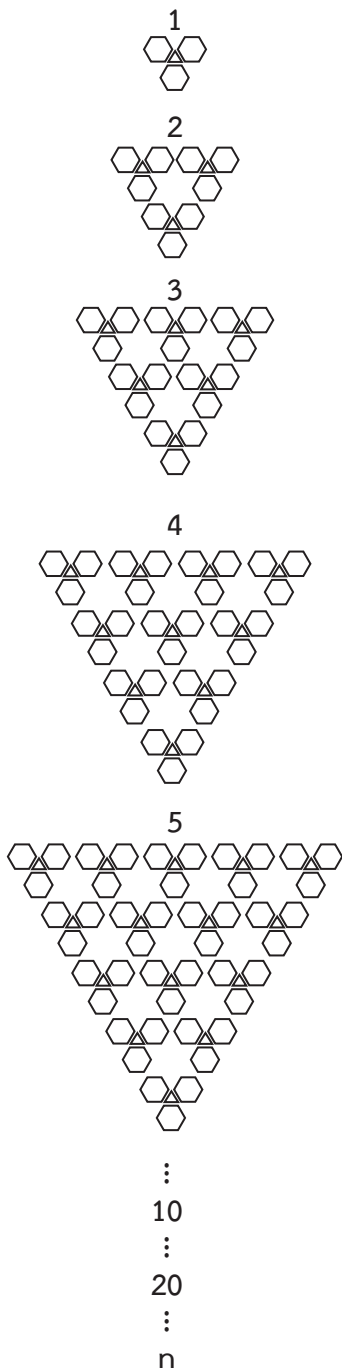
แนวคิด

เป็นไปได้ไม่ได้ เพราะว่า ในการออกแบบแต่ละครั้ง จะต้องใช้ $\triangle$, $\diamond$ และ ∇
อย่างละเท่า ๆ กัน ดังนั้นผลรวมของชิ้นส่วนในการออกแบบครั้งหนึ่ง ๆ
จะต้องหารด้วย 3 ลงตัว แต่ 100 หารด้วย 3 ไม่ลงตัว





ตัวอย่างที่ 2 กำหนดการออกแบบที่ใช้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีแบบรูปดังต่อไปนี้



คำถามที่ 1

มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าอย่างละกี่รูปในการออกแบบครั้งที่ 29

แนวคิด

พิจารณาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และจำนวนรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในการออกแบบในแต่ละครั้ง ตามลำดับดังนี้

ครั้งที่	จำนวน $\triangle$	จำนวน $\hexagon$
1	1	$1 \times 3 = 3$
2	$1 + 2 = 3$	$3 \times 3 = 9$
3	$1 + 2 + 3 = 6$	$6 \times 3 = 18$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$10 \times 3 = 30$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2} \times 3$

เนื่องจากการออกแบบครั้งที่ n จะต้องใช้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเท่ากับ $\frac{n(n+1)}{2}$ ดังนั้น

ในการออกแบบครั้งที่ 29 จะต้องใช้รูป

สามเหลี่ยมด้านเท่า เท่ากับ $\frac{29(29+1)}{2}$

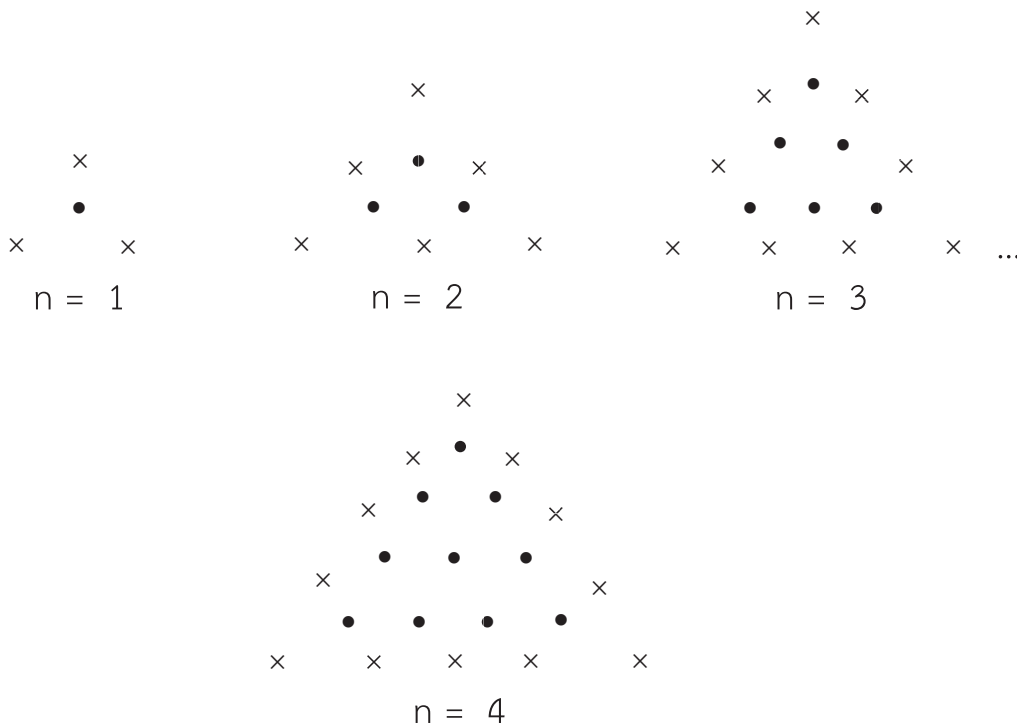
$$= 435 \text{ รูป}$$

และเนื่องจากจำนวนรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเป็น 3 เท่าของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ดังนั้น รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าจะมีจำนวน $3 \times 435 = 1,305$ รูป



ตัวอย่างที่ 3 แก้วมีที่ว่างหน้าบ้านจะทำแปลงปลูกต้นไม้ดอกโดยปลูกต้นมะลิ และต้นดาวเรืองให้มีแบบรูปต่อไปนี้



โดย • แทน ต้นมะลิ
x แทน ต้นดาวเรือง

คำถามที่ 1 ถ้าแก้วต้องการปลูกต้นมะลิ 4 แถว จะต้องใช้ต้นมะลิและต้นดาวเรืองอย่างละกี่ต้น

แนวคิด

นับต้นมะลิและต้นดาวเรืองจากแบบรูปเมื่อ $n = 4$

จะได้ ต้นมะลิ เท่ากับ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ต้น

พิจารณาต้นดาวเรืองรอบนอก จะพบว่าแต่ละด้านมีต้นดาวเรืองปลูกระหว่างต้นมะลิ

เนื่องจาก มีต้นมะลิด้านละ 4 ต้น

จะมีต้นดาวเรืองระหว่างต้นมะลิด้านละ 3 ต้น และที่มุมทั้งสามอีก 3 ต้น

รวมต้นดาวเรืองทั้งหมดเท่ากับ $(3 \times 3) + 3 = 3 \times 4 = 12$ ต้น

หรือ พิจารณาง่าย ๆ ว่าปลูกต้นมะลิ n แถว ต้นดาวเรืองเท่ากับ $3n$ ต้น
ดังนั้น จะต้องใช้ต้นมะลิ 10 ต้น และต้นดาวเรือง 12 ต้น



คำถามที่ 2 ถ้าแก้วต้องการปลูกต้นมะลิ 10 แถวเนื่องจากมีที่ว่างหน้าบ้านมาก
แก้วจะต้องปลูกต้นมะลิและต้นดาวเรืองอย่างละกี่ต้น

แนวคิด พิจารณาจำนวนต้นมะลิและจำนวนต้นดาวเรือง จากแบบรูปที่กำหนดให้
ดังตาราง ต่อไปนี้

จำนวนแถว	จำนวนต้นมะลิ	จำนวนต้นดาวเรือง
1	1	$3 = 3 \times 1$
2	$1 + 2 = 3$	$6 = 3 \times 2$
3	$1 + 2 + 3 = 6$	$9 = 3 \times 3$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$12 = 3 \times 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$3n$

จากตาราง เมื่อปลูกต้นมะลิ n แถว

จำนวนต้นมะลิเท่ากับ $\frac{n(n+1)}{2}$ ต้น

จำนวนต้นดาวเรืองเท่ากับ $3n$ ต้น

ดังนั้น แก้วต้องการปลูกต้นมะลิ 10 แถว จะต้องใช้

ต้นมะลิเท่ากับ $\frac{10(10+1)}{2} = 55$ ต้น

ต้นดาวเรืองเท่ากับ $3(10) = 30$ ต้น

คำถามที่ 3 แก้วจะต้องปลูกต้นมะลิกี่แถว จำนวนต้นมะลิจึงเท่ากับจำนวนต้นดาวเรือง

แนวคิด จำนวนต้นมะลิ n แถวเท่ากับ $\frac{n(n+1)}{2}$ ต้น

จำนวนต้นดาวเรือง เท่ากับ $3n$ ต้น

พิจารณาสมการ $\frac{n(n+1)}{2} = 3n$

จะได้ $n^2 + n = 6n$

หรือ $n^2 - 5n = 0$

$n(n - 5) = 0$

นั่นคือ $n = 0$ หรือ $n = 5$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนนับ ดังนั้น $n = 5$



ตรวจสอบคำตอบ

จำนวนต้นมะลิ n แถว มีต้นมะลิ $\frac{n(n+1)}{2}$ ต้น

จำนวนต้นมะลิ 5 แถว มีต้นมะลิ $\frac{5(5+1)}{2}$ ต้น

$$= 15 \text{ ต้น}$$

จำนวนต้นดาวเรือง เมื่อปลูกต้นมะลิ n แถว เท่ากับ $3n$ ต้น

ดังนั้น ต้นดาวเรืองเมื่อปลูกมะลิ 5 แถว เท่ากับ $3 \times 5 = 15$ ต้น

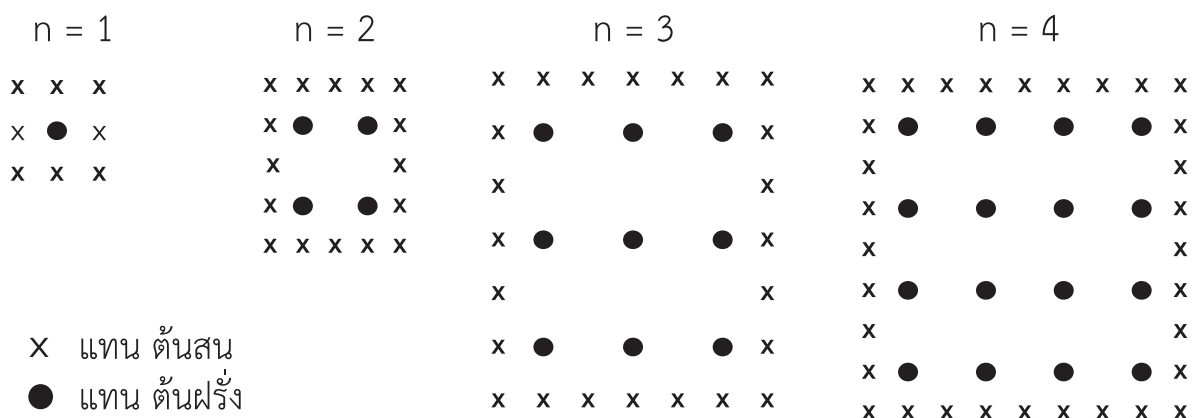
นั่นคือ เมื่อปลูกต้นมะลิ 5 แถว จำนวนต้นมะลิเท่ากับจำนวนต้นดาวเรือง

$$\text{คือ } 3 \times 5 = 15 \text{ ต้น}$$

นอกจากแบบรูปต่าง ๆ แล้ว การวิเคราะห์แบบรูปเพื่อหานิพจน์แทนรูปทั่วไปของแบบรูปที่นำไปสู่ความสัมพันธ์ในเรื่องสมการและอสมการก็เป็นเนื้อหาที่ควรให้นักเรียนได้รับการพัฒนา ทั้งนี้เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ซับซ้อนขึ้น ดังเช่น

จากเรื่องสวนฝรั่ง ครูสามารถสร้างสถานการณ์โจทย์ให้นักเรียนใช้อสมการแก้ปัญหา ดังตัวอย่างสถานการณ์ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 เจ้าของสวนมีเงิน 5,000 บาท ต้องการปลูกต้นฝรั่งและต้นสนตามแบบรูปที่โจทย์กำหนดให้ โดยต้นฝรั่งราคาต้นละ 10 บาท และต้นสนราคาต้นละ 5 บาท





คำถาม

เจ้าของสวนสามารถปลูกต้นฝรั่งจำนวนมากที่สุดกี่ต้น ในที่ดินรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 625 ตารางวา โดยปลูกต้นฝรั่งห่างกัน 3 เมตร

แนวคิด สมมติปลูกต้นฝรั่งแถวละ n ต้น

ดังนั้น จำนวนต้นฝรั่ง เท่ากับ n^2 ต้น

จำนวนต้นสน เท่ากับ $8n$ ต้น

ต้นฝรั่งราคาต้นละ 10 บาท ต้นฝรั่ง n^2 ต้น คิดเป็นเงิน $10n^2$ บาท

ต้นสนราคาต้นละ 5 บาท ต้นสน $8n$ ต้น คิดเป็นเงิน $5(8n) = 40n$ บาท

เจ้าของสวนลงทุนเป็นเงิน $10n^2 + 40n$ บาท

เจ้าของสวนมีทุน 5,000 บาท

ดังนั้น $10n^2 + 40n$ ต้องไม่เกิน 5,000

หรือ $n^2 + 4n$ ต้องไม่เกิน 500 บาท

พิจารณา $n^2 + 4n = n(n + 4)$

ใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนหาจำนวนสองจำนวนคูณกัน มีผลลัพธ์มากที่สุด

และไม่เกิน 500 โดยจำนวนทั้งสองต่างกัน 4

จะพบว่า ถ้าให้ $n = 20$ จะได้ $n + 4 = 24$

และ $n(n + 4) = 20 \times 24 = 480$ ไม่เกิน 500

ดังนั้น เจ้าของสวนมีเงินพอปลูกต้นฝรั่งมากที่สุดไม่เกินแถวละ 20 ต้น --- ①

ต้องการปลูกต้นฝรั่งห่างกัน 3 เมตร

และปลูกแถวละ n ต้น จะมีช่วงห่าง 3 เมตรอยู่ $n - 1$ ช่วง

ดังนั้น ระยะจากต้นฝรั่งต้นที่ 1 ถึงต้นที่ n จะยาว $3(n - 1)$ เมตร

แต่ต้องปลูกต้นสนห่างจากต้นที่ 1 และต้นที่ n ออกไปข้างละ 1.5 เมตร

นั่นคือ เมื่อปลูกต้นสนแล้วแต่ละแถวจะยาว $3(n - 1) + 3 = 3n$ เมตร

พิจารณาที่ดินที่ใช้ปลูกต้นไม้มี 625 ตารางวา เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดังนั้น แต่ละด้านของที่ดินจะยาว 25 วา หรือ 50 เมตร

นั่นคือ $3n \leq 50$ หรือ $n \leq \frac{50}{3} \approx 16.7$ เมตร

แต่ n เป็นจำนวนนับ ดังนั้น $n \leq 16$

ดังนั้น มีที่ดินปลูกต้นฝรั่งไม่เกินแถวละ 16 ต้น ----- ②

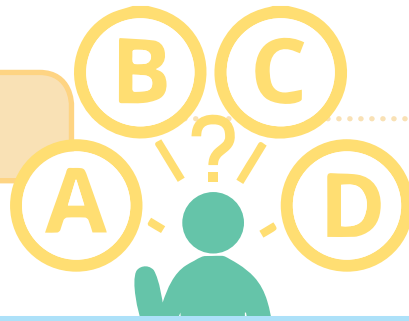
พิจารณา ① และ ② จะได้ว่า ถึงแม้ว่าจะมีทุนพอปลูกต้นฝรั่ง

แถวละ 20 ต้นก็จริง แต่มีเนื้อที่พอปลูกต้นฝรั่งได้เพียงแถวละ 16 ต้นเท่านั้น

ดังนั้น สามารถปลูกต้นฝรั่งได้ไม่เกินแถวละ 16 ต้น

นั่นคือ เจ้าของสวนปลูกต้นฝรั่งได้อย่างมาก $16 \times 16 = 256$ ต้น

ทางเลือก



คำถามที่ 1: ทางเลือก

ในร้านพิซซ่าแห่งหนึ่ง โดยปกติทางร้านจะมีหน้าให้สองอย่างอยู่แล้ว คือ ชีส และมะเขือเทศ นอกเหนือจากนี้ ท่านสามารถเลือกหน้าพิเศษเพิ่มเติมได้อีกหน้าพิเศษมีให้เลือก 4 อย่างคือ มะกอก แฮม เห็ด และซาลามิ

ระพีต้องการที่จะสั่งพิซซ่าที่เพิ่มหน้าพิเศษอีกสองชนิด อยากทราบว่าระพีจะสามารถสั่งพิซซ่าหน้าต่าง ๆ กัน ได้ทั้งหมดกี่แบบ

คำตอบ:แบบ

คะแนนเต็ม

ตอบ 6 แบบ

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ

แขนงวิชา : วิทยาศาสตร์

สถานการณ์ : ในเชิงอาชีพ

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	66.08
เกาหลี	58.54
ฮ่องกง-จีน	46.37
มาเก๊า-จีน	44.35
ไทย	27.60

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ในโจทย์ข้อนี้กล่าวถึงการสั่งพิซซ่า ซึ่งร้านพิซซ่าแต่ละร้านจะมีหน้าพิซซ่าชนิดต่าง ๆ ให้ลูกค้าเลือก สำหรับโจทย์ข้อนี้ ทางร้านจะกำหนดหน้าพิซซ่าสองชนิด คือ ชีส และมะเขือเทศ ซึ่งจะใส่ในพิซซ่าทุกชนิด และลูกค้าเลือกสั่งหน้าเพิ่มเติมอีก 2 ชนิด จากหน้าทั้งหมดอีก 4 ชนิด คือ มะกอก แฮม เห็ด และซาลามิ

สถานการณ์ในลักษณะนี้จะพบเห็นได้ทั่วไปในการเลือกของ 2 สิ่งจากของที่มีอยู่หลายสิ่ง เช่น เลือกหน้าไอศกรีม 2 ชนิด จากทั้งหมด 5 ชนิด เลือกใส่เสื้อและกางเกงจากเสื้อผ้าที่มีอยู่ โจทย์ต้องการให้หาทางเลือกทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้นได้จากการเลือกหน้าพิซซ่าพิเศษเพิ่มเติม 2 ชนิดจากทั้งหมด 4 ชนิด



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

การตอบคำถามนี้ นักเรียนต้องใช้ความรู้เรื่องหลักการนับเบื้องต้น ต้องแจกแจงเหตุการณ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้ ซึ่งเป็นพื้นฐานของการหาความน่าจะเป็นในการทดลองสุ่มและเหตุการณ์ โจทย์ถามว่าระพีสามารถสั่งพิซซ่าหน้าต่าง ๆ ได้กี่แบบ คือ เหตุการณ์ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นจากการเลือกของ 2 สิ่งพร้อมกันจาก 4 สิ่ง ซึ่งเนื้อหาอยู่ในเรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 รายวิชาพื้นฐาน



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1

ระพีต้องการที่จะสั่งพิซซ่าที่เพิ่มหน้าพิเศษอีกสองชนิด อยากทราบว่าระพีสามารถสั่งพิซซ่าต่าง ๆ กัน ได้ทั้งหมดกี่แบบ

แนวคิด จากโจทย์คำถามที่ให้ นักเรียนอาจใช้วิธีการเขียนแจกแจงเหตุการณ์ทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้น หรือสามารถใช้วิธีการเขียนแผนภาพต้นไม้ช่วยในการแจกแจง

ระพีสามารถสั่งหน้าพิซซ่าพิเศษเพิ่มเติมอีก 2 ชนิด จากหน้าทั้งหมดที่มีอยู่ 4 ชนิด คือ มะกอก แฮม เห็ด และซาลามิ ในการเลือกหน้าพิซซ่าจะเป็นการเลือกพร้อมกัน ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จะไม่มีการซ้ำ และการเลือกจะไม่เลือกหน้าซ้ำกัน

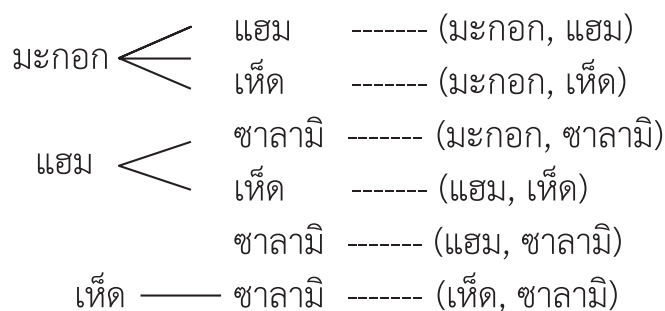


การเขียนแจกแจงเหตุการณ์ทั้งหมด

จากข้อกำหนดดังกล่าวสามารถเขียนแจกแจงเหตุการณ์ทั้งหมด ได้ดังนี้
(มะกอก, แสม) (มะกอก, เห็ด) (มะกอก, ชาลามี) (แสม, เห็ด) (แสม, ชาลามี)
และ (เห็ด, ชาลามี) ซึ่งมีทั้งหมด 6 แบบ

การเขียนแผนภาพต้นไม้

จากที่โจทย์กำหนดระพีจะเลือกหน้าพิชซ่า 2 ชนิด จาก มะกอก แสม เห็ด
และชาลามี ได้ดังนี้



จะได้ว่า สามารถสั่งพิชซ่าหน้าพิเศษเพิ่มเติมต่าง ๆ กัน ได้ 6 แบบ คือ
(มะกอก, แสม) (มะกอก, เห็ด) (มะกอก, ชาลามี) (แสม, เห็ด) (แสม, ชาลามี)
และ (เห็ด, ชาลามี)



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. มีข้อสังเกตเกี่ยวกับคะแนนสอบของนักเรียนไทย ซึ่งได้คะแนนน้อยกว่าประเทศอื่น ๆ ค่อนข้างมาก คือ มีนักเรียนไทยตอบถูกเพียง 27.60 เปอร์เซนต์ของนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ขณะที่นักเรียนจากประเทศญี่ปุ่นตอบถูก 66.08 เปอร์เซนต์ของนักเรียนญี่ปุ่นที่เข้าสอบ ทั้งนี้อาจจะเกิดจากความสับสนในโจทย์ที่กำหนด ถ้านักเรียนอ่านโจทย์โดยขาดความระมัดระวัง นักเรียนอาจจะเข้าใจว่าเลือกหน้าพิชซ่าเพียงหน้าเดียวหรือไม่เลือกก็ได้ ซึ่งไม่ใช่คำตอบที่โจทย์ต้องการ นอกจากนี้ นักเรียนอาจสับสนในการทำความเข้าใจโจทย์ เพราะในโจทย์ข้อนี้ได้กำหนดไว้ว่า ร้านจะมีหน้าให้สองอย่างอยู่แล้ว คือ ชีส และมะเขือเทศ ซึ่งในการทำข้อสอบไม่ต้องนำข้อมูลนี้มาใช้ ถ้านักเรียนเข้าใจผิดนำข้อมูลนี้มาใช้ในการหาวิธีของการเลือกด้วยก็จะทำให้ได้คำตอบที่ผิด



2. สถานการณ์จากโจทย์ถ้านักเรียนไม่มีปัญหาในการอ่านโจทย์ให้เข้าใจ ถือว่าเป็นโจทย์ที่ค่อนข้างง่ายและตรงไปตรงมา อีกทั้งในหลักสูตรก็ระบุอย่างชัดเจนถึงเนื้อหาเรื่องนี้ และมีรายละเอียดพร้อม ตัวอย่างในหนังสือเรียนมีค่อนข้างมาก ถ้านักเรียนได้ผ่านการเรียนในเรื่องการแจกแจงนับในหนังสือเรียนมาแล้ว นักเรียนควรจะทำโจทย์ข้อนี้ได้ อาจเป็นไปได้ว่าครูไม่ได้ให้นักเรียนได้ฝึกการวิเคราะห์และลองทำจริงมากพอ หรือไม่ก็ไม่ได้ให้หลักในการแจกแจง นับ ซึ่งถ้านักเรียนแจกแจงกรณีต่าง ๆ อย่างไม่เป็นระบบก็มีโอกาสจะผิดพลาดได้ คืออาจได้กรณีต่าง ๆ ไม่ครบถ้วนหรือไม่ก็อาจได้กรณีที่ซ้ำกัน ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง

ในการจัดการเรียนการสอนครูควรเพิ่มสถานการณ์โจทย์ที่มีข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง ฝึกให้นักเรียนแยกแยะให้ออกว่าข้อมูลส่วนไหนในโจทย์เป็นข้อมูลที่เป็นตัวประกอบให้เหตุการณ์สมจริง และข้อมูลส่วนไหนที่เป็นข้อมูลหลักในการนำไปใช้หาคำตอบของโจทย์ เพราะตัวอย่างในหนังสือเรียนส่วนใหญ่ไม่ว่าจะเป็นตัวอย่างหรือแบบฝึกหัดในส่วนที่เป็นเรื่องการหากรณีต่าง ๆ ของเหตุการณ์มักจะเป็นโจทย์ตรงไปตรงมาไม่ซับซ้อน สถานการณ์โจทย์ที่ครูอาจนำมาให้นักเรียนวิเคราะห์อาจเป็นเรื่องเกี่ยวกับการซื้อขาย การสั่งซื้ออาหาร การเลือกของขวัญ การแจกรางวัล โดยเป็นสถานการณ์ที่เกิดขึ้นได้จริงในชีวิตประจำวัน

ตัวอย่างสถานการณ์หนึ่ง เป็นต้นนี้

ในการประชุมเพื่อจัดค่ายของโรงเรียน มีครูร่วมประชุม 6 คน ในการสั่งอาหารกลางวัน ครูแต่ละคนสามารถเลือกสั่งอาหารได้ 4 รายการ จากรายการอาหารต่อไปนี้

1. ข้าวเหนียว
2. ส้มตำปู, ส้มตำไทย, ส้มตำปลาร้า
3. น้ำตก
4. ซุปหน่อไม้
5. ลาบหมู, ลาบไก่, ลาบเป็ด

คำถาม ถ้าครูทุกคนสั่งข้าวเหนียว ครูแต่ละคนจะมีวิธีสั่งอาหารกลางวันที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี โดยแต่ละวิธีจะไม่มีส้มตำมากกว่าหนึ่งชนิดและไม่มีลาบมากกว่าหนึ่งชนิด

แนวคิด เนื่องจากอาหารที่สั่งจะต้องมีข้าวเหนียว ดังนั้นชนิดของอาหารที่เลือกได้มีทั้งหมด 4 รายการ คือ ส้มตำ น้ำตก ซุปหน่อไม้ และลาบ โดยแต่ละชุดจะเลือกมาอีก 3 รายการ ดังนั้น จำนวนชุดอาหารที่จะเลือกได้เท่ากับจำนวนวิธีในการเลือกของ 3 สิ่ง

จากของทั้งหมด 4 สิ่ง แสดงได้ดังนี้

ชุดที่ 1 ส้มตำ น้ำตก ซุปหน่อไม้

ชุดที่ 2 ส้มตำ น้ำตก ลาบ

ชุดที่ 3 ส้มตำ ซุปหน่อไม้ ลาบ

ชุดที่ 4 น้ำตก ซุปหน่อไม้ ลาบ



ดังนั้น จะมีชุดอาหารกลางวันทั้งหมด 4 ชุด โดยชุดที่มีส้มตำจะเลือก
ส้มตำได้ 3 วิธี และชุดที่มีลาบจะเลือกลาบได้ 3 วิธี

ดังนั้น อาหารชุดที่ 1 สามารถเลือกส้มตำแตกต่างกันได้ 3 วิธี ดังนี้

อาหารชุดที่ 1 วิธีที่ 1 ส้มตำไทย น้ำตก ซุปหน่อไม้

วิธีที่ 2 ส้มตำปู น้ำตก ซุปหน่อไม้

วิธีที่ 3 ส้มตำปลาร้า น้ำตก ซุปหน่อไม้

อาหารชุดที่ 2 สามารถเลือกส้มตำแตกต่างกันได้ 3 วิธี และแต่ละวิธีเลือก
ลาบได้ 3 วิธี ดังนี้

อาหารชุดที่ 2 วิธีที่ 1 ส้มตำไทย น้ำตก ลาบหมู

วิธีที่ 2 ส้มตำไทย น้ำตก ลาบไก่

วิธีที่ 3 ส้มตำไทย น้ำตก ลาบเป็ด

วิธีที่ 4 ส้มตำปู น้ำตก ลาบหมู

วิธีที่ 5 ส้มตำปู น้ำตก ลาบไก่

วิธีที่ 6 ส้มตำปู น้ำตก ลาบเป็ด

วิธีที่ 7 ส้มตำปลาร้า น้ำตก ลาบหมู

วิธีที่ 8 ส้มตำปลาร้า น้ำตก ลาบไก่

วิธีที่ 9 ส้มตำปลาร้า น้ำตก ลาบเป็ด

ในทำนองเดียวกันอาหารชุดที่ 3, 4 สามารถเลือกได้ดังนี้

อาหารชุดที่ 3 เลือกส้มตำได้ 3 วิธี และแต่ละวิธีเลือกลาบได้ 3 วิธี

ดังนั้น อาหารชุดที่ 3 เลือกได้ทั้งหมด $3 \times 3 = 9$ วิธี

อาหารชุดที่ 4 เลือกลาบได้ 3 วิธี ดังนั้น เลือกได้ทั้งหมด 3 วิธี

ดังนั้น มีวิธีเลือกสั่งอาหารทั้งหมด ดังนี้

อาหารชุดที่ 1 เลือกได้ 3 วิธี

อาหารชุดที่ 2 เลือกได้ 9 วิธี

อาหารชุดที่ 3 เลือกได้ 9 วิธี

อาหารชุดที่ 4 เลือกได้ 3 วิธี

รวม $3 + 9 + 9 + 3 = 24$ วิธี

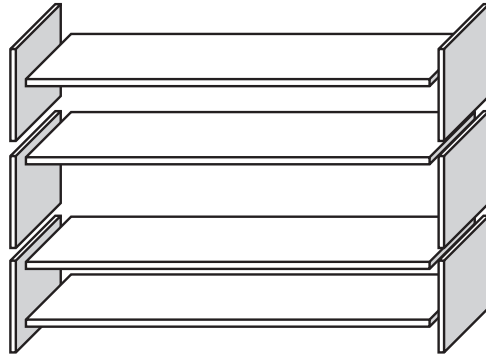
นั่นคือ จะมีวิธีสั่งอาหารกลางวันทั้งหมด 24 วิธี

ชั้นวางหนังสือ



การประกอบชั้นวางหนังสือหนึ่งชุดให้สมบูรณ์ ช่างไม้ต้องใช้ ส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้

แผ่นไม้ยาว 4 แผ่น,
แผ่นไม้สั้น 6 แผ่น,
ตัวหนีบตัวเล็ก 12 ตัว,
ตัวหนีบตัวใหญ่ 2 ตัว และ
สกรู 14 ตัว



คำถามที่ 1: ทางเลือก

ช่างไม้มีแผ่นไม้สี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างยาว 26 แผ่น อย่างสั้น 33 แผ่น
ตัวหนีบตัวเล็ก 200 ตัว ตัวหนีบตัวใหญ่ 20 ตัว และสกรู 510 ตัว
ช่างไม้สามารถประกอบชั้นวางหนังสือได้ทั้งหมดกี่ชุด
คำตอบ:

คะแนนเต็ม

ตอบ 5 ชุด

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ในเชิงอาชีพ

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	70.04
เกาหลี	72.25
ฮ่องกง-จีน	74.47
มาเก๊า-จีน	66.76
ไทย	35.16



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์โจทย์กล่าวถึงการประกอบชิ้นวางหนังสือหนึ่งชุดโดยช่างไม้ต้องใช้ส่วนประกอบต่าง ๆ ตามที่ระบุ และในคำถามได้กำหนดจำนวนส่วนประกอบแต่ละอย่างที่ใช้ประกอบชิ้นวางหนังสือให้ แล้วถามว่าช่างไม้สามารถประกอบชิ้นวางหนังสือได้ทั้งหมดกี่ชุด

เนื่องจากโจทย์ปัญหานี้เป็นสถานการณ์ที่ปรากฏอยู่ในชีวิตประจำวันถึงแม้นักเรียนอาจไม่สามารถประกอบเป็นชิ้นวางหนังสือได้ แต่ก็ควรมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันทำนองนี้ได้



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องใช้ความรู้สีกเชิงปริภูมิ และความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการคูณและหารจำนวนเต็ม โดยอาจใช้การคาดการณ์และความรู้สีกเชิงจำนวนประกอบการพิจารณาหาคำตอบ ทั้งนี้ นักเรียนจะต้องมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ การใช้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างถูกต้องเหมาะสม จึงจะสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 ช่างไม้มีแผ่นไม้สี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างยาว 26 แผ่น อย่างสั้น 33 แผ่น ตัวหนิบตัวเล็ก 200 ตัว ตัวหนิบตัวใหญ่ 20 ตัว และสกรู 510 ตัว ช่างไม้สามารถประกอบชิ้นวางหนังสือได้ทั้งหมดกี่ชุด

แนวคิด 1 คำนวณหาจำนวนชุดของชิ้นวางหนังสือที่อาจประกอบได้จากส่วนประกอบแต่ละอย่าง จะได้ว่า

มีแผ่นไม้อย่างยาว 26 แผ่น

ชิ้นวางหนังสือหนึ่งชุด ต้องใช้แผ่นไม้อย่างยาว 4 แผ่น

ดังนั้น ทำชิ้นวางหนังสือได้อย่างมาก $\frac{26}{4} \approx 6$ ชุด

ในทำนองเดียวกัน

แผ่นไม้อย่างสั้น 33 แผ่น ทำชิ้นวางหนังสือได้อย่างมาก $\frac{33}{6} \approx 5$ ชุด

ตัวหนีบทัวเล็ก 200 ตัว ทำชั้นวางหนังสือได้อย่างมาก $\frac{200}{12} \approx 16$ ชุด

ตัวหนีบทัวใหญ่ 20 ตัว ทำชั้นวางหนังสือได้อย่างมาก $\frac{20}{2} = 10$ ชุด

และ สกรู 510 ตัว ทำชั้นวางหนังสือได้อย่างมาก $\frac{510}{14} \approx 36$ ชุด

จากส่วนประกอบต่าง ๆ ที่นำมาใช้ประกอบเป็นชั้นวางหนังสือ พบว่า จำนวนแผ่นไม้ อย่างสั้นนำมาทำชั้นวางหนังสือได้อย่างมากเพียง 5 ชุด ซึ่งน้อยกว่าจำนวนชั้นวางหนังสือที่อาจประกอบได้จากส่วนประกอบอื่น ๆ

ดังนั้น ช่างไม้สามารถประกอบชั้นวางหนังสือได้ทั้งหมด 5 ชุด

แนวคิด 2 หาคำตอบโดยการประมาณค่าและตรวจสอบ ดังนี้

ขั้นที่ 1 ใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนคาดคะเนว่าส่วนประกอบใดจะใช้ประกอบเป็นชั้นวางหนังสือได้จำนวนชุดน้อยกว่าส่วนประกอบอย่างอื่น ๆ ซึ่งควรจะคาดคะเนได้ว่าเป็นแผ่นไม้ที่อาจเป็นแผ่นไม้ยาวหรือแผ่นไม้สั้น อย่างใดอย่างหนึ่ง

ขั้นที่ 2 ประมาณจำนวนแผ่นไม้ยาวที่สามารถนำไปประกอบชั้นวางหนังสือได้อย่างมากกี่ชุด จะได้ว่า $\frac{26}{4} \approx 6$ จากนั้นตรวจสอบว่า 6 ชุด เป็นคำตอบได้หรือไม่ โดยนำ 6 ไปคูณกับจำนวนแผ่นไม้สั้นที่ใช้ 6 แผ่นต่อ 1 ชุด จะพบว่า $6 \times 6 = 36$ ซึ่ง 36 มากกว่าจำนวนแผ่นไม้สั้นที่มีอยู่ 33 แผ่น ดังนั้น จำนวนชั้นวางหนังสือต้องน้อยกว่า 6 ชุด

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบจำนวนแผ่นไม้สั้นที่ใช้ประกอบชั้นวางหนังสือ 5 ชุด จะใช้แผ่นไม้สั้น $5 \times 6 = 30$ แผ่น และเหลือแผ่นไม้สั้นอีก 3 แผ่น เมื่อตรวจสอบส่วนประกอบอย่างอื่น ๆ ที่เหลือเพื่อการนำมาใช้ประกอบชั้นวางหนังสือ 5 ชุด ก็พบว่ามีความเพียงพอที่จะสร้างได้นั้นคือ ช่างไม้สามารถประกอบชั้นวางหนังสือได้ทั้งหมด 5 ชุด

แนวคิด 3 หาคำตอบโดยการแจกแจง ดังนี้

จำนวนชุด	แผ่นไม้ยาว	แผ่นไม้สั้น	ตัวหนีบทัวเล็ก	ตัวหนีบทัวใหญ่	สกรู	สร้างได้
1	4	6	12	2	14	✓
2	8	12	24	4	28	✓
3	12	18	36	6	42	✓
4	16	24	48	8	56	✓
5	20	30	60	10	70	✓
6	24	36	72	12	84	✗

จากการแจกแจงจะพบว่า ชั้นวางหนังสือ 6 ชุด ต้องใช้ไม้แผ่นสั้น 36 แผ่น ซึ่งมากกว่าที่มีอยู่ 3 แผ่น ดังนั้น ช่างไม้สามารถประกอบชั้นวางหนังสือได้ทั้งหมด 5 ชุด



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. เมื่อพิจารณาจากความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้คือการนึกภาพ ความรู้สึกเชิงปริภูมิ และความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการคูณ และการหารจำนวนเต็ม แล้วนักเรียนไทยตอบคำถามได้ถูกต้องเพียง 35.16 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ แสดงให้เห็นว่านักเรียนไทยขาดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ โดยเฉพาะการขาดทักษะในการใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิและความรู้สึกเชิงจำนวน ครูผู้สอนจะต้องตระหนักและให้ความสำคัญในเรื่องดังกล่าวให้มากขึ้น โดยจัดการเรียนรู้ให้เชื่อมโยงกับสถานการณ์ในชีวิตจริง และฝึกให้นักเรียนใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิและความรู้สึกเชิงจำนวนอย่างสม่ำเสมอในทุกสถานการณ์ที่สามารถทำได้

2. สำหรับโจทย์ปัญหาที่มีแนวคิดในการหาคำตอบได้หลายวิธีเช่นเดียวกับโจทย์ปัญหาข้างต้น ครูผู้สอนควรให้โอกาสนักเรียนได้เสนอแนวคิดในการหาคำตอบด้วยวิธีการที่แตกต่างกัน เพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในห้องเรียน และนักเรียนก็จะได้เห็นวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยครูผู้สอนสามารถใช้คำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดและตัดสินใจเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพจากแนวคิดที่แตกต่างกัน วิธีการดังกล่าวจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารและการนำเสนอ รวมถึงการมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

เพื่อฝึกทักษะและขยายความคิดในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียน ครูผู้สอนอาจตั้งคำถามเพิ่มเติมจากสถานการณ์โจทย์ข้างต้น ให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ในการหาคำตอบดังตัวอย่างต่อไปนี้

คำถาม จากสถานการณ์โจทย์และคำถามข้างต้น ถ้าต้องการประกอบชั้นวางหนังสือเพิ่มขึ้น 2 ชุด ช่างไม้จะต้องหาส่วนประกอบใดเพิ่มและเพิ่มเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะพอดีในการประกอบชั้นวางหนังสือ

แนวคิด จากสถานการณ์โจทย์และคำถามข้างต้น ช่างไม้สามารถประกอบชั้นวางหนังสือได้ 5 ชุด ถ้าต้องการประกอบชั้นวางหนังสือเพิ่มขึ้น 2 ชุด รวมเป็น 7 ชุด ส่วนประกอบที่ต้องเพิ่มคือแผ่นไม้ยาวและแผ่นไม้สั้น

ถ้าต้องการประกอบชั้นวางหนังสือ 7 ชุด

ใช้แผ่นไม้ยาว $7 \times 4 = 28$ แผ่น

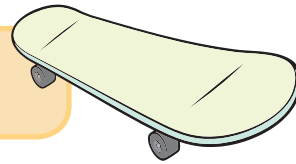
ใช้แผ่นไม้สั้น $7 \times 6 = 42$ แผ่น

ดังนั้น จะต้องหาแผ่นไม้ยาวเพิ่ม $28 - 26 = 2$ แผ่น

และหาแผ่นไม้สั้นเพิ่ม $42 - 33 = 9$ แผ่น



สเก็ตบอร์ด



อริญชอบสเก็ตบอร์ดมาก เขาไปร้านขายสเก็ตบอร์ดแห่งหนึ่งที่มีชื่อว่า “นักสเก็ต” เพื่อตรวจสอบราคา ที่ร้านนี้ ท่านสามารถซื้อสเก็ตบอร์ดที่ประกอบสำเร็จแล้ว หรือซื้อแผ่นกระดาน, ชุดล้อ 4 ล้อ, ชุดแกนล้อ 2 อัน และชุดอุปกรณ์ประกอบที่นำมาประกอบสเก็ตบอร์ดด้วยตัวเอง

ราคาสินค้าในร้านเป็นดังนี้

สินค้า	ราคา (เซต)	
สเก็ตบอร์ดสำเร็จรูป	82 หรือ 84	
แผ่นกระดาน	40, 60 หรือ 65	
ชุดล้อ 4 ล้อ	14 หรือ 36	
ชุดแกนล้อ 2 อัน	16	
ชุดอุปกรณ์ (ตลับลูกปืน, แผ่นยาง, สลักเกลียวและน็อต)	10 หรือ 20	

คำถามที่ 1 : สเก็ตบอร์ด

ถ้าอริญต้องการประกอบสเก็ตบอร์ดด้วยตัวเอง
จงหาราคาต่ำสุดและสูงสุดของการซื้ออุปกรณ์ร้านนี้
ราคาต่ำสุด :เซต
ราคาสูงสุด :เซต

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ
แขนงวิชา : จำนวน
สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล
สมรรถนะ : การทำใหม่
แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

คะแนนเต็ม

ตอบถูกทั้งราคาต่ำสุด (80 เซต) และราคาสูงสุด (137 เซต)

ได้คะแนนบางส่วน

ตอบถูกราคาต่ำสุดอย่างเดียว (80 เซต) หรือ
ตอบถูกราคาสูงสุดอย่างเดียว (137 เซต)

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	58.52
เกาหลี	77.89
ฮ่องกง-จีน	74.23
มาเก๊า-จีน	71.86
ไทย	32.38

คำถามที่ 2 : สเก็ตบอร์ด

ทางร้านเสนอแผ่นกระดานที่แตกต่างกันสามชนิด ชุดล้อต่างกันสองชุด และชุดอุปกรณ์ต่างกันสองชุด และมีชุดแกนล้อเพียง 1 แบบ อร์ญสามารถประกอบสเก็ตบอร์ดได้ต่างกันกี่แบบ

1. 6
2. 8
3. 10
4. 12

คะแนนเต็ม

ตอบ ข้อ 4. 12

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ

แขนงวิชา : วิทยาศาสตร์

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น	66.99
เกาหลี	65.04
ฮ่องกง-จีน	60.41
มาเก๊า-จีน	51.85
ไทย	20.89

คำถามที่ 3 : สเก็ตบอร์ด

อร์ญมีเงิน 120 เซต สำหรับใช้จ่าย และเขาต้องการซื้อชิ้นส่วนต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ดที่มีราคาแพงที่สุดเท่าที่เขาจะซื้อได้ อร์ญจะต้องจ่ายเงินเท่าไร ในการซื้อส่วนประกอบทั้ง 4 ส่วน ให้เติมคำตอบลงในตารางด้านล่างนี้

ส่วนประกอบ	จำนวนเงิน (เซต)
แผ่นไม้กระดาน	
ล้อ	
แกนล้อ	
ชุดอุปกรณ์	

คะแนนเต็ม

ตอบ แผ่นไม้กระดาน 65 เซต, ล้อ 14 เซต
แกนล้อ 16 เซต และชุดอุปกรณ์ 20 เซต

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น	53.57
เกาหลี	55.64
ฮ่องกง-จีน	61.96
มาเก๊า-จีน	65.06
ไทย	27.20

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์โจทย์ข้อนี้ สอดคล้องกับสถานการณ์ในชีวิตจริงเกี่ยวกับสินค้าประเภทอุปกรณ์ที่มีจำหน่ายในท้องตลาด เรามักพบว่าทั้งอุปกรณ์สำเร็จรูปพร้อมใช้งานได้เลย หรือมีชิ้นส่วนต่าง ๆ ของชุดอุปกรณ์ให้เลือกซื้อตามคุณภาพและราคาที่แตกต่างกัน เพื่อให้ผู้ซื้อนำไปประกอบด้วยตัวเอง ซึ่งอาจได้คุณภาพที่ดีกว่าหรือได้ราคาที่ประหยัดกว่า

ปัญหาสเก็ตบอร์ด เป็นสถานการณ์หนึ่งที่กำหนดเงื่อนไขให้นักเรียนต้องคิดวิเคราะห์ ตรวจสอบราคาของสเก็ตบอร์ดที่ประกอบสำเร็จแล้ว และราคาของชุดอุปกรณ์ประกอบที่นำมาประกอบด้วยตนเอง ชุดอุปกรณ์ประกอบที่นำมาประกอบด้วยตนเองประกอบด้วย แผ่นกระดาน ชุดล้อ 4 ล้อ ชุดล้อ 2 ล้อ และชุดอุปกรณ์ที่ใช้ในการประกอบอีก 1 ชุด โดยสินค้าแต่ละอย่างมีราคาให้เลือกซื้อหลายราคา

โจทย์ต้องการให้เลือกซื้อชุดอุปกรณ์ประกอบที่ประกอบด้วยตนเองซึ่งมีราคาต่ำสุดและสูงสุด และให้หาว่าจะมีแบบต่าง ๆ ของการประกอบสเก็ตบอร์ดด้วยตนเองทั้งหมดกี่แบบ ถ้าทางร้านเสนอแผ่นกระดานที่แตกต่างกันสามชนิด ชุดล้อต่างกันสองชนิดและชุดอุปกรณ์ต่างกันสองชุด และมีชุดแกนล้อเพียง 1 แบบ นอกจากนั้นโจทย์ต้องการให้หาว่าจะซื้อชุดอุปกรณ์ประกอบที่มีราคาแพงที่สุดภายในวงเงิน 120 เซตได้อย่างไร ในการตอบคำถามแต่ละประเด็นของโจทย์ นักเรียนจะต้องใช้ความรู้สีกเชิงจำนวนประกอบกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนต้องใช้คือ

1. ความรู้สีกเชิงจำนวนเพื่อพิจารณาว่าส่วนประกอบชิ้นใดราคาต่ำสุดหรือราคาสูงสุด แล้วใช้ความรู้เรื่องการบวกจำนวนเต็มในการหาค่ารวมต่ำสุดและสูงสุดของสเก็ตบอร์ด
2. ความรู้เรื่องการแจกแจงนับเหตุการณ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้ตามเงื่อนไขของโจทย์ในข้อนี้มีส่วนประกอบที่ต้องแจกแจงนับอยู่ 4 ส่วนที่จะนำมาประกอบสเก็ตบอร์ด ซึ่งแต่ละส่วนก็มีจำนวนให้เลือกแตกต่างกัน นักเรียนอาจใช้แผนภาพต้นไม้หรือแผนผังช่วยในการแจกแจง
3. การคิดวิเคราะห์ข้อมูล ความรู้สีกเชิงจำนวน และการเชื่อมโยงแนวคิด จากคำถามที่ 1 นำมาพิจารณาร่วมกันเพื่อหาคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์ต้องการ คือ มีเงิน 120 เซต และเขาต้องการซื้อชิ้นส่วนต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ดที่มีราคาแพงที่สุดที่เขาจะซื้อได้





แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

คำถามที่ 1 ถ้ารัฐต้องการประกอบสเก็ตบอร์ดด้วยตัวเอง จงหาราคาต่ำสุดและสูงสุดของการซื้ออุปกรณ์ร้านนี้

แนวคิด โจทย์ให้หาราคาต่ำสุดและสูงสุดของการซื้ออุปกรณ์ร้านนี้ เพื่อประกอบสเก็ตบอร์ดด้วยตนเอง

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้เกี่ยวกับราคาของส่วนประกอบที่นำมาประกอบเป็นสเก็ตบอร์ดเป็นดังนี้

ส่วนประกอบ	ราคา (เซต)
แผ่นไม้กระดาน	40, 60 หรือ 65
ชุดล้อ 4 ล้อ	14 หรือ 36
ชุดแกนล้อ 2 อัน	16
ชุดอุปกรณ์	10 หรือ 20

1. โจทย์ต้องการหาราคาต่ำสุดในการประกอบสเก็ตบอร์ด ก็ต้องเลือกส่วนประกอบทุกชิ้นราคาต่ำสุด

จะได้ ราคารวมของส่วนประกอบทั้งสี่ชิ้น เท่ากับ $40 + 14 + 16 + 10 = 80$ เซต
ดังนั้น รัฐจะได้สเก็ตบอร์ดที่มีราคาต่ำสุด เท่ากับ 80 เซต

2. โจทย์ต้องการหาราคาสูงสุดในการประกอบสเก็ตบอร์ด ก็ต้องเลือกส่วนประกอบทุกชิ้นราคาสูงสุด

จะได้ ราคารวมของส่วนประกอบทั้งสี่ชิ้น เท่ากับ $65 + 36 + 16 + 20 = 137$ เซต
ดังนั้น รัฐจะได้สเก็ตบอร์ดที่มีราคาสูงสุด เท่ากับ 137 เซต

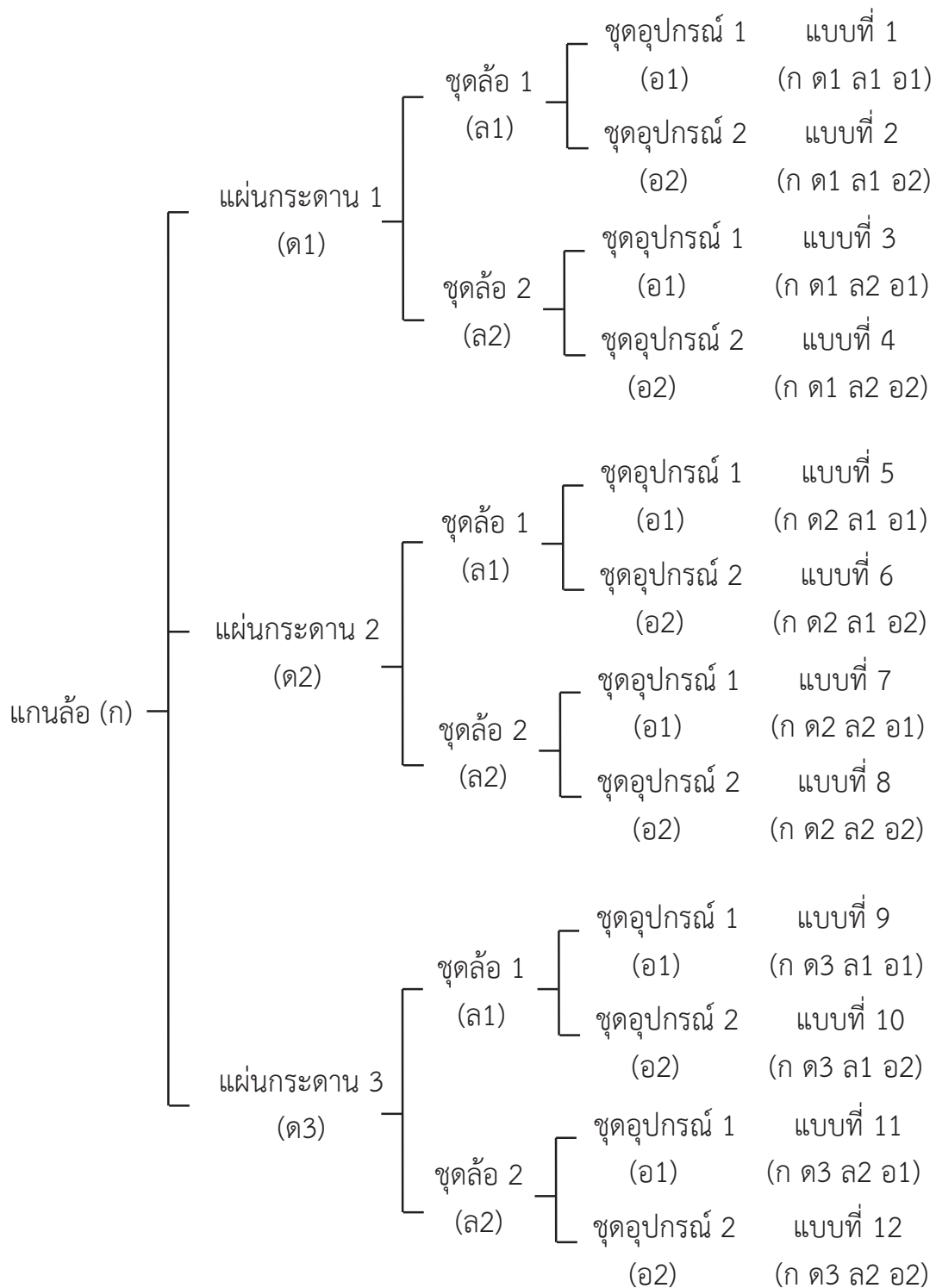
คำถามที่ 2 ทางร้านเสนอแผ่นกระดานที่แตกต่างกันสามชนิด ชุดล้อต่างกันสองชุด และชุดอุปกรณ์ต่างกันสองชุด และมีชุดแกนล้อเพียง 1 แบบ รัฐสามารถประกอบสเก็ตบอร์ด ได้ต่างกันกี่แบบ

แนวคิด คำถามนี้นักเรียนไม่ต้องใช้ข้อมูลของราคาสเก็ตบอร์ดสำเร็จรูป และราคาส่วนประกอบแต่ละชิ้นที่จะนำมาประกอบเป็นสเก็ตบอร์ด แต่จะใช้ข้อมูลเกี่ยวกับชนิดของแต่ละส่วนประกอบของสเก็ตบอร์ดเท่านั้น โดยโจทย์ต้องการหาสเก็ตบอร์ดแบบต่าง ๆ กันว่าจะได้กี่แบบ ซึ่งทางร้านเสนอแผ่นกระดานที่แตกต่างกัน 3 ชนิด ชุดล้อต่างกัน 2 ชุด และชุดอุปกรณ์ต่างกัน 2 ชุด และมีชุดแกนล้อเพียง 1 แบบ



เนื่องจากชุดแกนล้อยมีเพียงแบบเดียว สเก็ตบอร์ดทุกแบบก็ต้องใช้ชุดแกนล้อนี้ จึงไม่มีผลต่อจำนวนแบบต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ดที่โจทย์ต้องการหา

ในการแจกนับแบบต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ด เราสามารถแสดงโดยแผนภาพต้นไม้หรือแผนผังดังนี้



จากแผนภาพต้นไม้หรือแผนผังข้างต้น สามารถสรุปได้ว่าอัฐสามารถประกอบสเก็ตบอร์ดได้ต่างกัน 12 แบบ

คำถามที่ 3 อรัญมีเงิน 120 เซต สำหรับใช้จ่าย และเขาต้องการซื้อชิ้นส่วนต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ดที่แพงที่สุดเท่าที่เขาซื้อได้ อรัญจะต้องจ่ายเงินเท่าไรในการซื้อส่วนประกอบทั้ง 4 ส่วน

การแก้ปัญหาข้อนี้ต้องใช้ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้เกี่ยวกับราคาของส่วนประกอบที่นำมาประกอบสเก็ตบอร์ด ราคาสินค้าในร้านเป็นดังนี้

ส่วนประกอบ	ราคา (เซต)
แผ่นไม้กระดาน	40 , 60 หรือ 65
ชุดล้อ 4 ล้อ	14 หรือ 36
ชุดแกนล้อ 2 อัน	16
ชุดอุปกรณ์	10 หรือ 20

โจทย์ข้อนี้ได้กำหนดเงื่อนไขว่าอรัญจะต้องเลือกซื้อส่วนประกอบต่าง ๆ ที่มีราคาแพงที่สุด ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด คือราคารวมต้องไม่เกิน 120 เซต

จากข้อ 1 หากเลือกซื้อส่วนประกอบแต่ละชนิดที่มีราคาแพงที่สุด จะต้องใช้เงินทั้งหมด 137 เซต ซึ่งราคาเกินเงื่อนไขที่กำหนดอยู่ 17 เซต ดังนั้นอรัญจะต้องเลือกซื้อส่วนประกอบบางชนิดที่มีราคาต่ำลงมาน้อย 17 เซต

โดยเริ่มจากซื้อแผ่นกระดานในราคาสูงสุดคือ 65 เซต ก่อนแล้วลดราคาส่วนประกอบอื่นอีก 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 เลือกซื้อแผ่นกระดานในราคาสูงสุดคือ 65 เซต ชุดล้อราคา 36 เซต แกนล้อราคา 16 เซต และเลือกซื้อชุดอุปกรณ์ในราคาที่ต่ำลงคือ 10 เซต จะได้ราคารวม 127 เซต

แบบที่ 2 เลือกซื้อแผ่นกระดานในราคาสูงสุดคือ 65 เซต เลือกซื้อชุดล้อราคาต่ำลงคือ 14 เซต ส่วนแกนล้อราคา 16 เซต และชุดอุปกรณ์ราคา 20 เซตเท่าเดิม จะได้ราคารวม 115 เซต

แต่อรัญมีเงิน 120 เซตเขาอาจเลือกซื้อแผ่นกระดานในราคาที่ต่ำลงมาคือ 60 เซต แล้วเลือกส่วนประกอบอื่นได้อีก 2 แบบดังนี้

แบบที่ 3 เลือกซื้อแผ่นกระดานในราคาที่ต่ำลงมาคือ 60 เซต ชุดล้อราคา 36 เซต แกนล้อราคา 16 เซต และเลือกซื้อชุดอุปกรณ์ในราคาที่ต่ำลงคือ 10 เซตจะได้ราคารวม 122 เซต

แบบที่ 4 เลือกซื้อแผ่นกระดานในราคาต่ำลงมาคือ 60 เซต ชุดล้อราคาต่ำลงมาคือ 14 เซต แกนล้อราคา 16 เซต และเลือกซื้อชุดอุปกรณ์ในราคา 20 เซต จะได้ราคารวม 110 เซต

รายละเอียดของทั้ง 4 แบบ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ส่วนประกอบ	จำนวนเงิน (เซต)			
	แบบที่ 1	แบบที่ 2	แบบที่ 3	แบบที่ 4
แผ่นไม้กระดาน	65	65	60	60
ลื้อ	36	14	36	14
แกนลื้อ	16	16	16	16
ชุดอุปกรณ์	10	20	10	20
รวมราคา	127	115	122	110

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขที่กำหนดให้กับตารางข้างต้น พบว่าแบบที่ 2 เป็นแบบที่ตรงกับเงื่อนไขของโจทย์มากที่สุด

ดังนั้น คำตอบเป็นดังตาราง

ส่วนประกอบ	จำนวนเงิน(เซต)
แผ่นไม้กระดาน	65
ลื้อ	14
แกนลื้อ	16
ชุดอุปกรณ์	20
รวมราคา	115

ดังนั้น รัฐบาลจะต้องจ่ายเงินซื้อส่วนประกอบเป็นเงิน 115 เซต



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ในการตอบคำถามที่ 1 นักเรียนไทยตอบถูก 32.30 เปอร์เซนต์ ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ซึ่งน้อยกว่าประเทศอื่น ๆ เช่นนักเรียนประเทศญี่ปุ่นตอบถูก 58.52 เปอร์เซนต์ ของจำนวนนักเรียนญี่ปุ่นที่เข้าสอบ นักเรียนประเทศจีน-มาเก๊า จีน-ฮ่องกง และเกาหลีตอบถูกมากกว่า 70 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบของแต่ละประเทศ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนไทยไม่คุ้นเคยกับสเก็ทบอร์ดที่จะต้องประกอบด้วย 4 ส่วนที่นำมาประกอบเป็นสเก็ทบอร์ดหรือไม่คุ้นเคยกับโจทย์ปัญหาที่ให้ข้อมูลมากกว่าสิ่งที่ต้องใช้ในการหาคำตอบ คือให้ราคาสเก็ทบอร์ดสำเร็จรูปมาด้วย อาจเป็นไปได้ว่านักเรียนไทยยังขาดทักษะการอ่าน วิเคราะห์ แยกแยะข้อมูลว่าข้อมูลส่วนไหนไม่ต้องใช้ในการหาคำตอบ และส่วนไหนเป็นข้อมูลที่นำมาใช้ในการหาคำตอบตามเงื่อนไขของโจทย์ในการหาคำตอบของคำถามนี้ หากนักเรียนใช้ความรู้สึกเชิงจำนวน จะพบว่าถ้าต้องการราคาต่ำสุด ควรจะเลือกซื้ออุปกรณ์แต่ละชนิดในราคาต่ำสุด จึงจะได้ราคารวมต่ำสุด ในทำนองเดียวกันการเลือกซื้ออุปกรณ์แต่ละชนิดในราคาสูงสุด จะได้ราคารวมสูงสุด

2. จากคะแนนสอบของนักเรียนไทยในคำถามที่ 2 พบว่านักเรียนสามารถทำคะแนนได้น้อยมากเมื่อเทียบกับประเทศอื่นๆ คือได้ 20.89 เปอร์เซนต์ ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ซึ่งประเทศอื่น ๆ เช่น นักเรียนประเทศจีน-มาเก๊า จีน-ฮ่องกง เกาหลีและญี่ปุ่นตอบถูกมากกว่า 50 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบของแต่ละประเทศ ซึ่งอาจเป็นเพราะนักเรียนไม่ทราบว่าจะใช้วิธีการใดมาแจกแจงนับชุดของอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่นำมาประกอบเป็นสเก็ทบอร์ดให้ได้แบบแตกต่างกันให้ได้ครบทุกกรณี ในการตอบคำถามข้อนี้ นักเรียนสามารถใช้แผนภาพต้นไม้ หรือตารางช่วยในการแจกแจงนับได้ เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องนี้ ครูควรยกตัวอย่าง สถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาที่ต้องใช้วิธีการแจกแจงในลักษณะที่คล้าย ๆ กันนี้ เช่น

การเลือกซื้ออาหารเป็นชุด ซึ่งประกอบด้วยข้าวสวย กับข้าวสองอย่าง และขนมหวานหนึ่งอย่าง โดยร้านนี้มีอาหารดาวให้เลือกห้าชนิด และขนมหวานอีกสี่ชนิด

การแต่งตัวโดยกำหนดให้นิมีเสื้อสี่ตัวแตกต่างกัน กางเกงสามตัวแตกต่างกัน รองเท้าสองคู่แตกต่างกัน และถุงเท้าสี่คู่แตกต่างกัน อยากทราบว่านิจะสามารถแต่งตัวโดยใช้เสื้อ กางเกง รองเท้า และถุงเท้าที่มีนี้ให้ได้แบบต่าง ๆ กันทั้งหมดกี่วิธี

ครูอาจให้นักเรียนวิเคราะห์ว่ามีแนวทางในการหาคำตอบสถานการณ์ทั้งสองอย่างไร โดยให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงเหตุผลของการเลือกใช้วิธีนั้นในการหาคำตอบ



3. สำหรับคำถามที่ 3 นักเรียนไทยตอบถูก 27.20 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ซึ่งน้อยกว่าประเทศอื่น ๆ เช่นนักเรียนประเทศญี่ปุ่นและเกาหลี ตอบถูกมากกว่า 50 เปอร์เซ็นต์ ของจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบของแต่ละประเทศ และนักเรียนประเทศจีน-มาเก๊า จีน-ฮ่องกง ตอบถูก มากกว่า 60 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบของแต่ละประเทศ คำถามนี้มีเงื่อนไขที่นักเรียนต้องใช้ในการหาคำตอบ **คือมีเงิน 120 เซต** สำหรับซื้อชิ้นส่วนต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ดที่แพงที่สุดเท่าที่เขาซื้อได้ นักเรียนจะต้องใช้ความรู้สึกเชิงจำนวน รวมทั้งทักษะการคิดวิเคราะห์-สังเคราะห์ ประกอบกันในการพิจารณาหาคำตอบอย่างรอบคอบ

ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกทำโจทย์ลักษณะคำถามที่ 3 ให้มากขึ้น เพื่อให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการในการเชื่อมโยงข้อมูลต่าง ๆ เพื่อหาคำตอบที่เป็นไปได้ และสอดคล้องกับเงื่อนไขมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข ตัวอย่างเช่นครูอาจใช้โจทย์ข้อนี้ฝึกนักเรียนโดยปรับคำถามใหม่ดังนี้ วิชิตมีเงิน 125 เซต สำหรับใช้จ่าย และเขาต้องการซื้อชิ้นส่วนต่าง ๆ ของสเก็ตบอร์ดที่แพงที่สุดเท่าที่เขาซื้อได้ วิชิตจะต้องจ่ายเงินเท่าไร

นอกจากนั้นครูอาจสร้างสถานการณ์ที่คล้ายกันฝึกให้นักเรียนทำดังตัวอย่างร้านอาหารแห่งหนึ่งมีรายการอาหารดังตาราง

รายการอาหาร	ราคา (บาท)
ข้าวหน้าหมูทอด / ข้าวหน้าไก่ย่าง	109/119
ข้าวหน้ากุ้ง / ราเมนผัดซีเมามะหมู	139/129
มิโซซูป	25
ปูอัดซาซิมิ	75
ชุดที่ 1 : ข้าวหน้าหมูทอด ข้าวหน้ากุ้ง ปูอัดซาซิมิ แกรมมิโซซูป 1 ชาม	319
ชุดที่ 2 : ข้าวหน้าไก่ย่าง ราเมนผัดซีเมามะหมู ปูอัดซาซิมิ แกรมมิโซซูป 2 ชาม	329



คำถามที่ 1 ถ้าครอบครัวหนึ่ง พ่อ แม่ และลูก รวม 3 คน ต้องการสั่งอาหารโดยแต่ละคนจะต้องทานข้าวหรือราเมนหนึ่งจาน มิโซซูป 1 ชาม ส่วนปู้ดซาซิมิสั่งมาทานด้วยกัน 1 ที่ เขาควรสั่งอาหารอย่างไรจึงจะประหยัดที่สุด

แนวคิด เนื่องจากครอบครัวนี้มีจำนวน 3 คนต้องการสั่งอาหารอย่างประหยัดที่สุด โดยแต่ละคนจะต้องทานข้าวหรือราเมนจำนวน 1 จาน มิโซซูป 1 ชาม ส่วนปู้ดซาซิมิสั่งมาทานด้วยกัน 1 ที่ จากเงื่อนไขของโจทย์ต้องการประหยัดจึงควรสั่งอาหารชุดจำนวน 1 ชุดก่อนเพราะถ้าไม่สั่งเป็นชุด จะทำให้ราคาแพงกว่า (นักเรียนควรตรวจสอบด้วย) แล้วสั่งเพิ่มให้ครบตามที่โจทย์ต้องการซึ่งทดลองสั่งได้ 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 สั่งอาหารชุดที่ 1 มีข้าวหน้าหมูทอด ข้าวหน้ากุ้ง ปู้ดซาซิมิ 1 ที่และมิโซซูป 1 ชามราคา 319 บาท ต้องสั่งข้าวเพิ่มอีก 1 จานข้าวราคาถูกสุดคือ ข้าวหมูทอด ราคา 109 บาท และมิโซซูปอีกจำนวน 2 ชามราคารวม 50 บาท รวมเป็นเงิน เท่ากับ $319 + 109 + 50 = 478$ บาท

แบบที่ 2 สั่งอาหารชุดที่ 2 มีข้าวหน้าไก่ย่าง ราเมนผัดซีเมะหมู ปู้ดซาซิมิ และมิโซซูป 2 ชาม ราคา 329 บาท ซึ่งต้องสั่งข้าวหน้าหมูทอดอีก 1 จาน ราคา 109 บาท และมิโซซูปอีก 1 ชามราคา 25 บาท รวมเป็นเงิน 463 บาท

ดังนั้น เขาควรสั่งชุดที่ 2 จำนวนหนึ่งชุด สั่งข้าวหน้าหมูทอดเพิ่มอีก 1 จาน และมิโซซูปอีก 1 ชาม รวมเป็นเงิน 463 บาท

คำถามที่ 2 ถ้าคนกลุ่มหนึ่งจำนวน 5 คน มีคนหนึ่งไม่ทานกุ้ง อีกคนหนึ่งไม่ทานเผ็ด ต้องการสั่งอาหารทานด้วยกันโดยแต่ละคนจะต้องทานข้าวหรือราเมนหนึ่งจาน มิโซซูป 1 ชาม ส่วนปู้ดซาซิมิสั่งมาทานด้วยกัน 3 ที่ เขาควรสั่งอาหารอย่างไรจึงจะประหยัดที่สุด

แนวคิด คนกลุ่มนี้จำนวน 5 คน ต้องการสั่งอาหารอย่างประหยัดที่สุด โดยมีคนหนึ่งไม่ทานกุ้ง อีกคนหนึ่งไม่ทานเผ็ด ต้องการสั่งอาหารทานด้วยกันโดยแต่ละคน จะต้องทานข้าวหรือราเมนหนึ่งจาน มิโซซูป 1 ชาม ส่วนปู้ดซาซิมิสั่งมาทานด้วยกัน 3 ที่ จากเงื่อนไขข้างต้นต้องการประหยัดจึงควรสั่งอาหารชุดก่อน ซึ่งแจกได้ 3 แบบดังตาราง

แบบที่	ราคาชุดที่ 1	ราคาชุดที่ 2	ราคาข้าวหน้าหมูทอด	ราคาปู้ดซาซิมิ	ราคามิโซซูป	รวมเป็นเงิน
1	319×2	-	109	75	25×3	897
2	-	329×2	109	75	25	867
3	319	329	109	75	25×2	882

จากตารางจะได้ว่าต้องซื้อชุดที่ 2 จำนวน 2 ชุด และสั่งเพิ่มอีกสามอย่างคือข้าวหน้าหมูทอดจำนวน 1 จาน ปู้ดซาซิมิ 1 ที่ และมิโซซูป 1 ชาม รวมเป็นเงิน 867 บาท



คำถามที่ 3 ถ้าพนักงานบริษัทหนึ่งจำนวน 6 คน มีเงินรางวัลจำนวน 1,200 บาท ทุกคนต้องการสั่งอาหารทานด้วยกันโดยแต่ละคนจะต้องทานข้าวหรือราเมนหนึ่งจานมิโซซูป 1 ชาม และปูอัดซาซิมิอีก 1 ที่ ซึ่งมีสองคนขอทานข้าวหน้ากุ้ง อีกคนหนึ่งขอทานราเมน ผัดซีเมะหมู และคนหนึ่งไม่ทานปูอัด เขาควรสั่งอาหารอย่างไรจึงจะถูกใจทุกคนและใช้เงินให้มากที่สุดจากเงินรางวัลที่ได้

แนวคิด เนื่องจากต้องการสั่งอาหารทานด้วยกันจำนวน 6 คน โดยแต่ละคนจะต้องทานข้าวหรือราเมนหนึ่งจาน มิโซซูป 1 ชาม และปูอัดซาซิมิอีก 1 ที่ ซึ่งมีสองคนขอทานข้าวหน้ากุ้ง อีกคนหนึ่งขอทานราเมนผัดซีเมะหมู และคนหนึ่งไม่ทานปูอัด

ชุดที่ 1 : ข้าวหน้าหมูทอด ข้าวหน้ากุ้ง ปูอัดซาซิมิ แกรมมิโซซูป 1 ชาม

ชุดที่ 2 : ข้าวหน้าไก่ย่าง ราเมนผัดซีเมะหมู ปูอัดซาซิมิ แกรมมิโซซูป 2 ชาม

จากเงื่อนไขข้างต้น มีเงินรางวัลจำนวน 1,200 บาท อาจสั่งอาหารได้ 2 แบบ ดังตาราง

แบบที่	ราคาชุดที่ 1	ราคาชุดที่ 2	ราคาข้าวหน้าหมูทอด	ราคาปูอัดซาซิมิ	ราคามิโซซูป	รวมเป็นเงิน
1	319×2	329	-	75×2	25×2	1,167
2	319	329	$109 + 139$	75×3	25×3	1,196

จากตารางเขาควรสั่งแบบที่ 2 ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องใช้เงินมากที่สุด

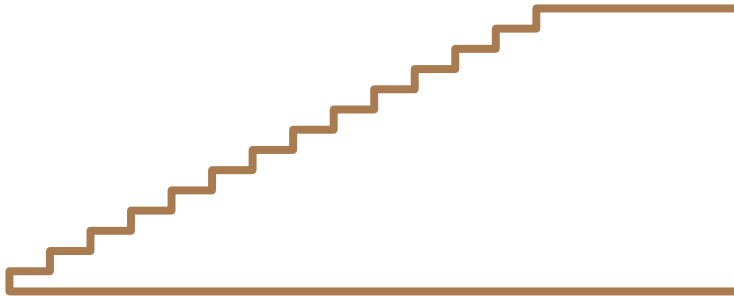
ดังนั้น เขาควรสั่งอาหารชุดที่ 1 และชุดที่ 2 อย่างละชุด ข้าวหน้ากุ้งและข้าวหน้าหมูทอดอีกอย่างละ 1 จาน ปูอัดซาซิมิ 3 จานและมิโซซูปอีก 3 ชาม รวมเป็นเงิน 1,196 บาท

จากตัวอย่างสถานการณ์โจทย์ข้างต้นครูอาจให้นักเรียนทำงานกลุ่ม แล้วให้นักเรียนนำผลงานมานำเสนอแลกเปลี่ยนเรียนรู้กัน

บันได



แผนผังข้างล่างแสดง บันได 14 ขั้น และความสูงทั้งหมด 252 เซนติเมตร



ความสูงทั้งหมด
252 เซนติเมตร

ความลึกทั้งหมด 400 เซนติเมตร

คำถามที่ 1: บันได

ความสูงแต่ละขั้นของบันได 14 ขั้น เป็นเท่าใด

ความสูง :เซนติเมตร

คะแนนเต็ม

ตอบ 18 เซนติเมตร

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริภูมิและรูปทรง

แขนงวิชา : -

สถานการณ์ : ปริภูมิและรูปทรง

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	80.73
เกาหลี	80.68
ฮ่องกง-จีน	86.54
มาเก๊า-จีน	88.60
ไทย	52.19

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

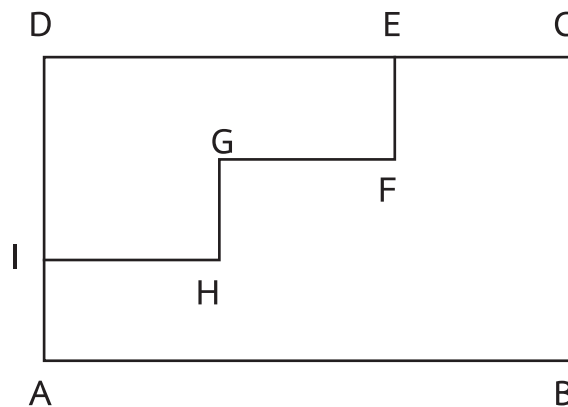
โจทย์กำหนดแผนผังแสดงบันได 14 ขั้น มีความสูงและความลึกทั้งหมดเป็น 252 เซนติเมตร และ 400 เซนติเมตร ตามลำดับ แล้วให้หาความสูงแต่ละขั้นของบันได

สถานการณ์นี้มีเจตนาให้นักเรียนวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติที่เป็นแบบจำลองทางเรขาคณิตของขั้นบันได ซึ่งแผนผังได้แสดงให้เห็นว่าขั้นบันไดทุกขั้นสูงเท่ากัน



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการแก้โจทย์ปัญหาต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตและความรู้ลึกเชิงปริภูมิ โดยเฉพาะความสามารถในการรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปริภูมิ การใช้จินตนาการและการนึกภาพ ประกอบความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับส่วนของรูปเรขาคณิตที่หักมุมเป็นมุมฉากตามแนวดิ่งและแนวนอน ความยาวรอบรูปจะเป็นเช่นเดียวกับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สอดคล้องกัน ดังตัวอย่าง



ความยาวรอบรูปของรูป ABCEFGHI เท่ากับความยาวรอบรูปของรูป ABCD ทั้งนี้เพราะว่า $EF + GH = DI$ และ $FG + HI = ED$

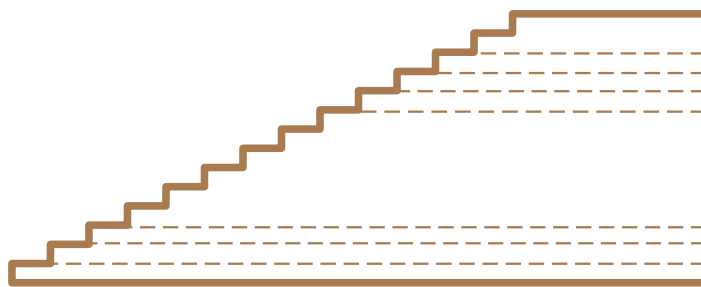


แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 ความสูงแต่ละชั้นของบันได 14 ขั้นเป็นเท่าใด

แนวคิด เมื่อพิจารณาแผนผังที่โจทย์กำหนดให้ ถ้านักเรียนมีความสามารถในการนึกภาพที่รับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปริภูมิอย่างถูกต้อง ก็จะมองเห็นว่า ความสูงของบันไดทั้ง 14 ขั้นรวมกันจะเท่ากับความสูงทั้งหมด 252 เซนติเมตร และชั้นบันไดสูงเท่ากันทุกชั้น ดังรูป



ความสูงทั้งหมด
252 เซนติเมตร

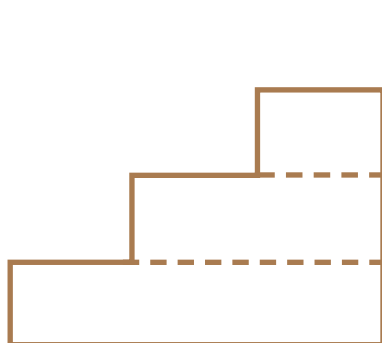
ความลึกทั้งหมด 400 เซนติเมตร

ดังนั้น ความสูงแต่ละชั้นของบันได เป็น $\frac{252}{14} = 18$ เซนติเมตร



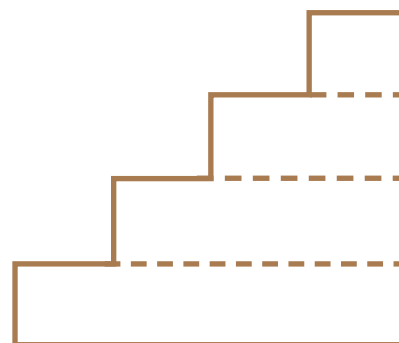
ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ถ้านักเรียนไม่สามารถนึกภาพเห็นความสัมพันธ์ระหว่างความสูงของบันได 14 ขั้นกับความสูงทั้งหมด 252 เซนติเมตร ตามที่โจทย์กำหนด วิธีที่จะช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ข้างต้นได้ง่ายขึ้น ครูอาจใช้วิธีเขียนแผนผังแสดงบันไดในลักษณะเดียวกับสถานการณ์โจทย์ แต่ลดจำนวนชั้นและความสูงทั้งหมดลง เช่น เขียนแผนผังแสดงบันได 3 ขั้น หรือ 4 ขั้น โดยมีความสูงทั้งหมดเป็น 60 เซนติเมตร และเป็น 72 เซนติเมตร ตามลำดับ ดังรูป



รูปที่ 1

60 ซม.



รูปที่ 2

72 ซม.





รูปที่ 1 แสดงให้เห็นว่าบันได 3 ชั้น สูง 60 เซนติเมตร

จะได้บันไดแต่ละชั้น สูง $\frac{60}{3} = 20$ เซนติเมตร

รูปที่ 2 แสดงให้เห็นว่าบันได 4 ชั้น สูง 72 เซนติเมตร

จะได้บันไดแต่ละชั้น สูง $\frac{72}{4} = 18$ เซนติเมตร

ในทำนองเดียวกัน เมื่อมีบันได 14 ชั้น สูง 252 เซนติเมตร

จะได้บันไดแต่ละชั้น สูง $\frac{252}{14} = 18$ เซนติเมตร

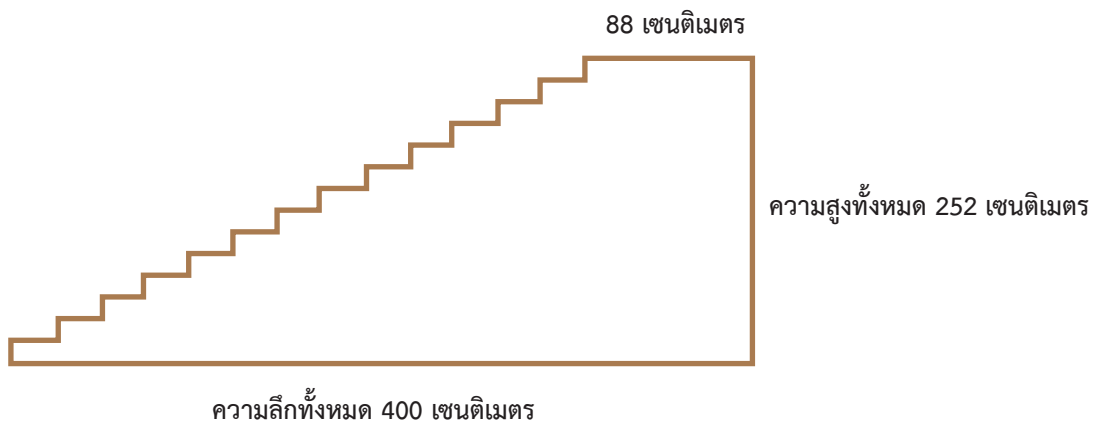
2. นักเรียนไทยตอบคำถามได้ถูกต้องเพียง 52.19 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ในขณะที่นักเรียนญี่ปุ่น เกาหลี และจีน ตอบได้ถูกต้องเกิน 80 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบ แสดงให้เห็นว่าโจทย์ปัญหาข้อนี้ไม่ยาก เพราะความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคือความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต ความสามารถในการใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิและการนึกภาพที่ถูกต้อง ร่วมกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ นักเรียนควรจะหาคำตอบได้ถูกต้อง แต่ปรากฏว่ายังมีนักเรียนไทยอีกประมาณครึ่งหนึ่งที่ยังทำโจทย์ข้อนี้ไม่ได้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนกลุ่มนี้ยังขาดความรู้และทักษะดังกล่าวข้างต้น ครูผู้สอนจึงต้องตระหนักและให้ความสำคัญ โดยเฉพาะการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตจริง เพื่อให้ นักเรียนไทยสามารถแก้ปัญหาได้ทัดเทียมกับประเทศอื่น

3. การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปริภูมิเป็นส่วนหนึ่งของความรู้สึกเชิงปริภูมิ ซึ่งเป็นความสามารถของบุคคลในการรับรู้และเข้าใจเกี่ยวกับ ขนาด รูปร่าง ตำแหน่ง ทิศทาง ระยะทาง และความสัมพันธ์ของรูปและสิ่งต่าง ๆ อันจะนำไปสู่การคาดคะเนที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง และการตัดสินใจที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับขนาด ตำแหน่ง ทิศทาง และระยะทางของสิ่งต่าง ๆ รอบตัว การฝึกให้นักเรียนมีทักษะดังกล่าวเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพราะจะช่วยให้ นักเรียนสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในชีวิตประจำวัน ได้อย่างมีประสิทธิภาพ



4. ครูผู้สอนอาจเพิ่มข้อมูลในสถานการณ์โจทย์เพื่อฝึกทักษะการใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิ ในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียนได้ เช่น กำหนดสถานการณ์โจทย์ ดังนี้

แผนผังข้างล่างแสดงบันได 14 ขั้น ที่มีความสูงทั้งหมด 252 เซนติเมตร และมีความลึกทั้งหมด 400 เซนติเมตร ถ้าบันไดขั้นบนสุดมีความกว้าง 88 เซนติเมตร ขั้นบันไดที่เหลือแต่ละขั้นจะมีความกว้างเท่าใด

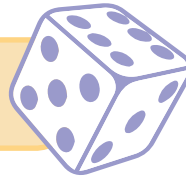


แนวคิด ความลึกทั้งหมดของบันได 14 ขั้นคือ 400 เซนติเมตร บันไดขั้นบนสุดมีความกว้าง 88 เซนติเมตร ขั้นบันไดอื่น ๆ ที่เหลือมีความกว้างเท่ากันหมด

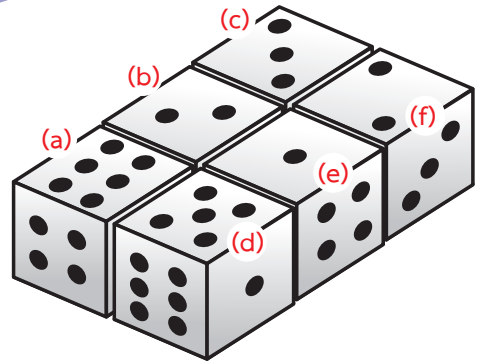
จะได้ ความลึกทั้งหมดของบันได 13 ขั้น คือ $400 - 88 = 312$ เซนติเมตร

ดังนั้น ความกว้างของบันไดแต่ละขั้นคือ $\frac{312}{13} = 24$ เซนติเมตร

ลูกเต๋า



รูปแสดงลูกเต๋า 6 ลูก มีชื่อติดกำกับไว้ว่า (a) (b) (c) (d) (e) และ (f) เป็นกฎของลูกเต๋าคือ จำนวนจุดที่อยู่บนหน้าตรงกันข้ามสองหน้ารวมกันต้องเป็น 7 เสมอ



คำถามที่ 1 : ลูกเต๋า

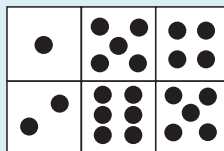
จงเขียนจำนวนจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่างของลูกเต๋ที่อยู่ในภาพ ลงในตารางข้างล่าง

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

คะแนนเต็ม

แถวบน (1 5 4) แถวล่าง (2 6 5) หรือนักเรียนอาจเขียนจำนวนจุดด้านหน้าลูกเต๋าแทนตัวเลขก็ได้ ดังข้างล่าง

1	5	4
2	6	5



ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริภูมิและรูปทรง

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ในเชิงการอาชีพ

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ

% ตอบถูก

ญี่ปุ่น	78.90
เกาหลี	69.04
ฮ่องกง-จีน	74.30
มาเก๊า-จีน	72.36
ไทย	52.98



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ในโจทย์ข้อนี้ เป็นการเชื่อมโยงการใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิมาช่วยวิเคราะห์เงื่อนไขโจทย์ เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ โดยกำหนดภาพของลูกเต๋าวางเรียงกันสองแถว แถวละ 3 ลูก รวมเป็น 6 ลูก และมีชื่อติดกำกับไว้เป็น (a), (b), (c), (d), (e) และ (f) ลูกเต๋าทันทั้ง 6 ลูก ในภาพมีจุดปรากฏบนหน้าลูกเต๋าดังต่อไปนี้ ลูกที่หงายขึ้นเป็นจำนวนแตกต่างกัน โจทย์กำหนดกฎของลูกเต๋ามาแล้ว ให้หาจำนวนจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่างของลูกเต๋าทีอยู่ในภาพ



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิและเข้าใจเงื่อนไขจากโจทย์ที่ว่า ลูกเต๋ามีลักษณะเป็นลูกบาศก์ที่มีจำนวนจุดอยู่บนหน้าทั้งหก ซึ่งเป็นไปตามกฎที่ว่า จำนวนจุดที่อยู่บนหน้าตรงกันข้ามสองหน้ารวมกันต้องเป็น 7 เสมอ โดยนักเรียนจะต้องมีความสามารถในการจินตนาการและการนิรนัย เพื่อหาจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าที่อยู่ด้านล่างซึ่งเป็นหน้าที่อยู่ตรงกันข้ามกับหน้าที่กำหนดให้ของลูกเต๋าดังกล่าว และเขียนคำตอบให้สอดคล้องกับสัญลักษณ์ที่กำหนดที่ลูกเต๋าดังกล่าวและลูกที่วางเรียงกันตามลำดับ



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1

จงเขียนจำนวนจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่างของลูกเต๋าทีอยู่ในภาพ ลงในตารางข้างล่าง

(a)	(b)	(c)
1	5	4
2	6	5
(d)	(e)	(f)

แนวคิด พิจารณาจำนวนจุดบนหน้าลูกเต๋าแต่ละลูก จินตนาการและนึกภาพ เพื่อหาจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าด้านล่างที่เป็นหน้าตรงกันข้าม โดยเมื่อรวมกันแล้วต้องเป็น 7 ได้ดังนี้

ลูกเต๋า (a) มี 6 จุด ปรากฏบนด้านบน ดังนั้นมีจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่าง 1 จุด
 ลูกเต๋า (b) มี 2 จุด ปรากฏบนด้านบน ดังนั้นมีจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่าง 5 จุด
 ลูกเต๋า (c) มี 3 จุด ปรากฏบนด้านบน ดังนั้นมีจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่าง 4 จุด
 ลูกเต๋า (d) มี 5 จุด ปรากฏบนด้านบน ดังนั้นมีจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่าง 2 จุด
 ลูกเต๋า (e) มี 1 จุด ปรากฏบนด้านบน ดังนั้นมีจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่าง 6 จุด
 ลูกเต๋า (f) มี 2 จุด ปรากฏบนด้านบน ดังนั้นมีจุดบนหน้าที่อยู่ด้านล่าง 5 จุด

นำจำนวนจุดที่ได้บันทึกลงในตารางได้ดังนี้

(a)	(b)	(c)
1	5	4
2	6	5
(d)	(e)	(f)



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

เป็นที่น่าสังเกตว่ามีนักเรียนไทยเกือบครึ่งหนึ่งของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ที่ทำข้อสอบข้อนี้ไม่ถูกต้อง ทั้ง ๆ ที่โดยเนื้อหาสาระแล้วเป็นข้อสอบที่ไม่ยาก ซึ่งอาจเป็นไปได้ว่า

1. นักเรียนอ่านโจทย์ไม่เข้าใจ หรือมีปัญหาในการมองภาพที่โจทย์กำหนดให้ เพราะโจทย์ได้กำหนดชื่อให้ลูกเต๋าเป็น (a) , (b) , (c) , (d) , (e) และ (f) ซึ่งเป็นสัญลักษณ์กำกับไว้ในภาพของลูกเต๋าทันทีที่เรียงกันเป็นสองแถวแถวละสามลูกในกล่องใส
2. นักเรียนไม่คุ้นเคยกับการเขียนคำตอบลงในตารางของข้อสอบข้อนี้ เพราะจะต้องมีการแปลงคำตอบที่ได้จากการจินตนาการและนึกภาพที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในโจทย์มาเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนจะต้องใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิมาช่วยในการวิเคราะห์ นักเรียนอาจสับสนและไม่อยากใช้เวลาในการคิดทำความเข้าใจเพื่อหาคำตอบ



3. นักเรียนอาจเคยชินกับคำว่า “แต้ม” ในการบอกจำนวนจุดบนลูกเต๋ามาก่อนหน้านี้ มา เมื่อต้องใช้จำนวนจุดบนลูกเต๋ามาก่อนหน้านี้ ในการตอบ จึงสงสัยว่าจะเขียนอย่างไรดี คือจะเป็นภาพของจุด หรือตัวเลขที่แทนจำนวนจุด จึงทำให้เสียเวลาในการตัดสินใจ ทำข้อสอบได้ล่าช้าหรือไม่สมบูรณ์

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูสามารถใช้ลูกเต๋ามาก่อนหน้านี้ เป็นสื่อการสอนเพื่อให้นักเรียนมีความคุ้นเคยกับลูกเต๋า ครูอาจใช้ลูกเต๋ามาก่อนหน้านี้ ในการทบทวนเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายเรื่อง เช่น การบวก การลบ และการคูณ ทั้งนี้เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีความเชื่อมโยงกับการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์บนด้านต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตสามมิตินั้น

ครูควรให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการทำโจทย์ประเภทที่ต้องใช้การจินตนาการ และนึกภาพถึงด้านที่มองไม่เห็นของรูปเรขาคณิตสามมิติทั่ว ๆ ไป โดยสามารถวิเคราะห์หาคำตอบตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด ตลอดจนสามารถนำเสนอคำตอบในลักษณะที่แตกต่างไปจากที่นักเรียนคุ้นเคยทั่ว ๆ ไปดังตัวอย่างโจทย์ต่อไปนี้

มีลูกเต๋า 2 ลูก มีข้อติดกำกับไว้เป็น (a) และ (b) เป็นกฎของลูกเต๋าคือ จำนวนจุดที่อยู่บนหน้าตรงกันข้ามสองหน้ารวมกันต้องเป็น 7 เสมอ

คำถามที่ 1 เมื่อทอดลูกเต๋า (a) และ (b) พร้อมกัน 6 ครั้ง ปรากฏหน้าที่หงายขึ้นแสดงจำนวนจุดบนลูกเต๋าทิ้งสอง เขียนผลลัพธ์เป็นคู่อันดับได้ดังนี้

(1, 3) , (2, 4) , (3, 6) , (4, 1) , (5, 2) และ (6, 5)

จงเขียนคู่อันดับของจำนวนจุดบนลูกเต๋าคู่หน้าทีคว่ำลงของแต่ละคู่อันดับข้างต้นตามลำดับ

แนวคิด เนื่องจากจำนวนจุดบนหน้าตรงกันข้ามสองหน้าของลูกเต๋ารวมกันต้องเป็น 7 จะได้คู่อันดับของหน้าทีคว่ำลงทั้ง 2 ลูกลงโดยพิจารณาจากแต่ละคู่อันดับที่กำหนดให้ดังนี้ จากคู่อันดับของจำนวนจุดบนหน้าทีหงายขึ้นของลูกเต๋า (a) และ (b) เป็นดังนี้ (1, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 1), (5, 2) และ (6, 5)

ดังนั้น จะหาคู่อันดับของจำนวนจุดบนหน้าทีคว่ำลงตามลำดับได้ดังนี้

(1, 3) ตรงกันข้ามกับ (6, 4)

(2, 4) ตรงกันข้ามกับ (5, 3)

(3, 6) ตรงกันข้ามกับ (4, 1)

(4, 1) ตรงกันข้ามกับ (3, 6)

(5, 2) ตรงกันข้ามกับ (2, 5) และ

(6, 5) ตรงกันข้ามกับ (1, 2)

ดังนั้น คู่อันดับที่ต้องการคือ (6, 4), (5, 3), (4, 1), (3, 6), (2, 5) และ

(1, 2) ตามลำดับ



คำถามที่ 2 ทอดลูกเต๋า (a) และ (b) โดยไม่ให้เห็นผลลัพธ์ ถ้าทราบเพียงว่าผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าที่คว่ำลงเป็น 8 จงหาว่าคู่อันดับของจำนวนจุดบนหน้าที่หงายขึ้นของลูกเต๋าทิ้งสองเป็นอะไรได้บ้าง และผลบวกของจำนวนจุดของแต่ละคู่อันดับที่หาได้เป็นเท่าไรบ้าง จงแสดงเหตุผลว่าทำไมจึงได้ผลบวกเป็นเช่นนั้น

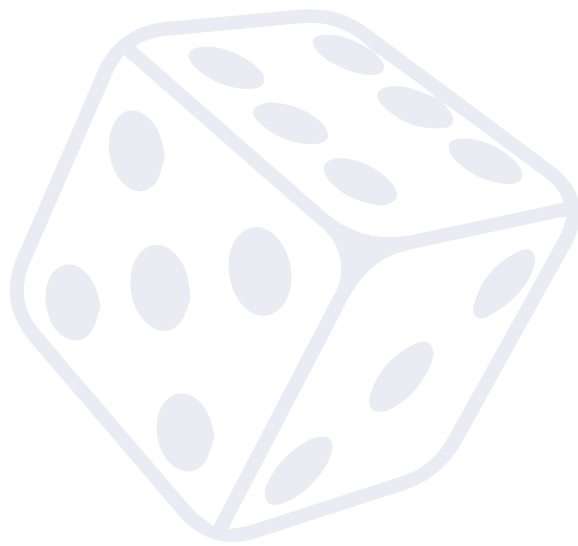
แนวคิด พิจารณาคู่อันดับของจำนวนจุดบนหน้าที่คว่ำลง ซึ่งมีผลบวกของจุดบนหน้าทั้งสองเป็น 8 ซึ่งอาจเป็น (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3) หรือ (4, 4) เมื่อใช้กฎของลูกเต๋าทิ้งสองลูกแต่ละครั้ง ผลบวกของจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าตรงกันข้ามต้องเป็น 7 จะได้คู่อันดับของจำนวนจุดบนหน้าที่หงายขึ้นเป็นดังนี้

(5, 1), (1, 5), (4, 2), (2, 4) และ (3, 3) ตามลำดับ
และจะได้ว่าผลบวกของจำนวนจุดในแต่ละคู่อันดับเป็นดังนี้

$$5 + 1, 1 + 5, 4 + 2, 2 + 4, 3 + 3$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็น 6 เท่ากัน เหตุผลที่ได้ผลลัพธ์เป็น 6 เท่ากันทุกคู่อันดับ เป็นเพราะว่าผลบวกของจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าตรงกันข้ามต้องเป็น 7 สำหรับลูกเต๋าลูกแต่ละลูก เมื่อทอดลูกเต๋าสองลูกแต่ละครั้ง ผลบวกของจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าตรงข้ามของลูกเต๋าทิ้งสองลูกจะเท่ากับ 14 เสมอ แต่เราทราบว่าผลบวกของจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าที่คว่ำลงของลูกเต๋าทิ้งสองเป็น 8

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนจุดที่อยู่บนหน้าที่หงายขึ้นของลูกเต๋าทิ้งสองจึงเท่ากับ

$$14 - 8 = 6$$




คำถามที่ 3 ในการทอดลูกเต๋าสองลูก (a) และ (b) ถ้าทราบว่าผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าที่คว่ำลงของลูกเต๋าทิ้งสองเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว จงหาว่าผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าที่หงายขึ้นของลูกเต๋าทิ้งสองนั้นเป็นจำนวนใดได้บ้าง

แนวคิด โจทย์กำหนดให้ผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าที่คว่ำลงของลูกเต๋าทิ้งสองเป็นจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว ซึ่งได้แก่ 5 และ 10

เนื่องจาก จำนวนจุดบนหน้าตรงกันข้ามของลูกเต๋แต่ละลูกรวมกันต้องเป็น 7 ดังนั้น จำนวนจุดบนหน้าตรงกันข้ามของลูกเต๋าสองลูกรวมกันต้องเป็น 14

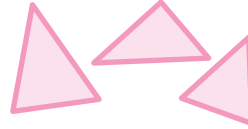
1. ถ้าผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าลูกที่คว่ำของลูกเต๋าทิ้งสองเป็น 5
จะได้ผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าที่หงายขึ้นของลูกเต๋าทิ้งสองเป็น $14 - 5 = 9$

2. ในทำนองเดียวกัน ถ้าผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าลูกที่คว่ำของลูกเต๋าทิ้งสองเป็น 10 จะได้ผลบวกของจำนวนจุดบนหน้าที่หงายขึ้นของลูกเต๋าทิ้งสองเป็น

$$14 - 10 = 4$$

คำตอบจึงเป็น 9 และ 4

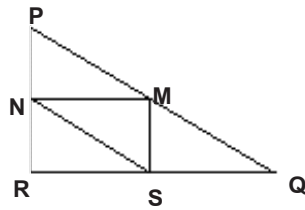
สามเหลี่ยม



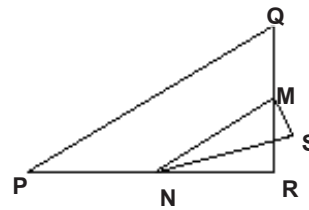
คำถามที่ 1: สามเหลี่ยม

จงเขียนวงกลมล้อมรอบข้อที่มีรูปตรงกับคำอธิบายต่อไปนี้
สามเหลี่ยม PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม R เป็นมุมฉาก ส่วนของเส้นตรง RQ สั้นกว่า ส่วนของเส้นตรง PR จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ และจุด N เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง QR จุด S อยู่ภายในสามเหลี่ยม ส่วนของเส้นตรง MN ยาวกว่า ส่วนของเส้นตรง MS

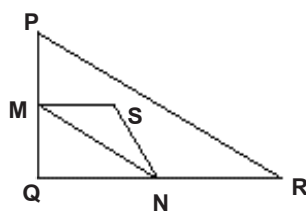
1.



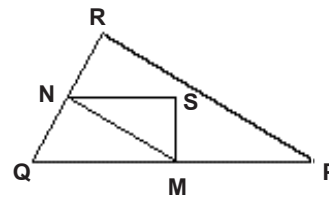
2.



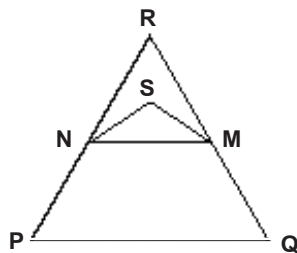
3.



4.



5.



คะแนนเต็ม

ตอบ ข้อ 4.

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริภูมิและรูปทรง

แขนงวิชา : เรขาคณิต

สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	72.40
เกาหลี	63.10
ฮ่องกง-จีน	65.10
ไทย	47.20



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ในคำถามที่ 1 ให้หารูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะตรงตามคำบรรยายที่ให้มา มีเจตนาให้นักเรียนใช้ความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายที่เป็นนามธรรมในโจทย์ โดยแปลความหมายเป็นรูปธรรมด้วยการเขียนรูป หรือวิเคราะห์หาแบบจำลองทางเรขาคณิตที่มีสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขในโจทย์ทุกเงื่อนไข การวิเคราะห์ของนักเรียนจะต้องใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตและความรู้ลึกเชิงปริภูมิประกอบด้วย



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ สมบัติของรูปเรขาคณิตสองมิติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับจุด มุม ส่วนของเส้นตรง รูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ และความรู้ลึกเชิงปริภูมิ ตลอดจนความสามารถในการใช้เหตุผลแบบคัดออก



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

คำถามที่ 1 จงเขียนวงกลมล้อมรอบข้อที่มีรูปตรงกับคำอธิบายต่อไปนี้

สามเหลี่ยม PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม R เป็นมุมฉาก ส่วนของเส้นตรง RQ สั้นกว่าส่วนของเส้นตรง PR จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ และจุด N เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง QR จุด S อยู่ภายในสามเหลี่ยม ส่วนของเส้นตรง MN ยาวกว่าส่วนของเส้นตรง MS

แนวคิด การแก้โจทย์ปัญหานี้ นักเรียนต้องวิเคราะห์รูปเรขาคณิตแต่ละรูปโดยใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตสองมิติที่เกี่ยวข้องร่วมกับความรู้ลึกเชิงปริภูมิเกี่ยวกับจุด ขนาดของมุมและส่วนของเส้นตรง เพื่อพิจารณาหาว่าแต่ละรูปมีส่วนใดขัดแย้งกับเงื่อนไขโจทย์ ซึ่งสามารถทำได้โดยอ่านโจทย์ไปทีละขั้นตอน เมื่อพบว่ามีส่วนที่ไม่สอดคล้องเงื่อนไขในแต่ละข้อ ก็ตัดรูปที่ไม่ใช่ออกไป ดังตัวอย่างการพิจารณาตามลำดับข้อความในโจทย์ ดังนี้

- สามเหลี่ยม PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม R เป็นมุมฉาก

จากข้อกำหนดนี้ พบว่า รูปข้อ 3 และ รูปข้อ 5 ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข กล่าวคือ รูปข้อ 3 มีมุม Q เป็นมุมฉาก และรูปข้อ 5 ที่รูปสามเหลี่ยม PQR ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นรูปข้อ 3 และรูปข้อ 5 จึงไม่ใช่คำตอบของปัญหานี้

- ส่วนของเส้นตรง RQ สั้นกว่าส่วนของเส้นตรง PR
จากข้อกำหนดนี้ พบว่า รูปข้อ 1 มีส่วนของเส้นตรง RQ ยาวกว่าส่วนของเส้นตรง PR ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขในโจทย์ ดังนั้น รูปข้อ 1 จึงไม่ใช่คำตอบของปัญหานี้
 - จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ และจุด N เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง QR
จากข้อกำหนดนี้ พบว่ารูปข้อ 2 จุด M และจุด N ไม่เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ และส่วนของเส้นตรง QR ตามที่โจทย์กำหนด ดังนั้น รูปข้อ 2 จึงไม่ใช่คำตอบของปัญหานี้
- จากการวิเคราะห์จึงเหลือรูปข้อ 4 ที่ควรเป็นคำตอบของโจทย์ แต่เพื่อให้แน่ใจ จึงควรตรวจสอบความสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ยังไม่ได้พิจารณาต่อ ตามที่โจทย์กำหนดมาว่า เป็นรูปที่มีจุด S อยู่ภายในสามเหลี่ยมและส่วนของเส้นตรง MN ยาวกว่าส่วนของเส้นตรง MS
- จากข้อกำหนดนี้ พบว่า รูปข้อ 4 มีลักษณะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองประการหลังนี้และสอดคล้องกับเงื่อนไขอื่น ๆ ในโจทย์ทุกประการ
- นั่นคือ รูปข้อ 4 เป็นรูปเรขาคณิตที่เป็นคำตอบของปัญหา



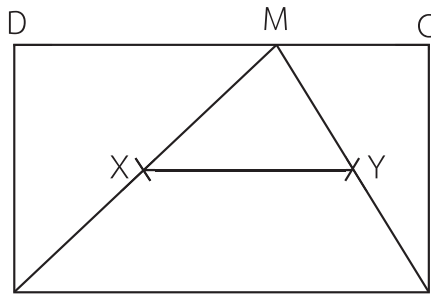
ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

ครูควรให้นักเรียนเข้าใจและจดจำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมแต่ละชนิดที่เกี่ยวข้องกับความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอาจฝึกให้นักเรียนจินตนาการและเขียนรูปตามเงื่อนไขที่ครูกำหนด เพื่อฝึกให้นักเรียนใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิและความรู้สึกเชิงจำนวนในการจินตนาการเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติ เพื่อให้ได้รูปที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ครูกำหนดให้ทุกประการ

นอกจากความรู้เกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตแล้ว นักเรียนควรได้รับการฝึกฝนในการวิเคราะห์ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ เหล่านั้น เพื่อยืนยันหรือคัดออกรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้ ซึ่งเป็นทักษะที่มีประโยชน์ในชีวิตประจำวันในการเลือกสิ่งของที่ให้ประโยชน์เหมาะสมกับจุดประสงค์ของการใช้งาน เป็นที่น่าสังเกตว่ามีนักเรียนไทยไม่ถึงครึ่งของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้อง บ่งบอกถึงว่านักเรียนยังขาดความสามารถในการใช้เหตุผลแบบคัดออก นักเรียนไม่ทราบจะเริ่มต้นแก้ปัญหาอย่างไร จึงไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาจนได้คำตอบสุดท้าย ซึ่งเป็นเรื่องที่ครูควรจัดประสบการณ์การเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนได้พบปัญหาและฝึกแก้ปัญหาในลักษณะทำนองเดียวกันนี้ให้มากขึ้น โดยอาจให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการเขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ และใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิต วิเคราะห์ผลที่สอดคล้องกับรูปที่สร้างหรือใช้โจทย์ทำนองเดียวกันกับสถานการณ์ “สามเหลี่ยม” ข้างต้นหรืออาจใช้ตัวอย่างสถานการณ์ ดังต่อไปนี้

1. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD มีด้าน AB ยาวกว่าด้าน BC จุด M อยู่บนด้าน CD โดยที่ $DM > CM$ จุด X และจุด Y เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AM และส่วนของเส้นตรง BM ตามลำดับ จงเขียนรูปตามเงื่อนไขในโจทย์ แล้วหาว่าข้อความในข้อใดต่อไปนี้จริง

- 1) $BM > AM$
- 2) $AX = MX$
- 3) $MY < MX$
- 4) $\triangle ADM \cong \triangle BCM$
- 5) $\triangle ABM \sim \triangle XYM$
- 6) $XY = \frac{1}{2} AB$

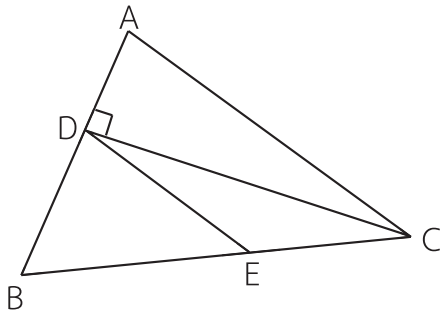


ข้อ 2), ข้อ 3), ข้อ 5) และข้อ 6)

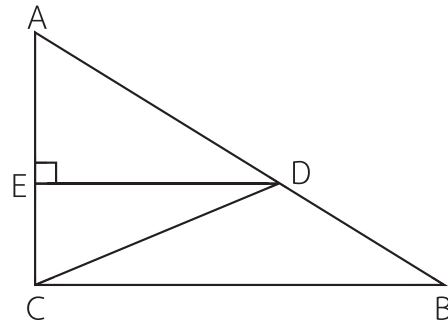
2. จงเขียนวงกลมล้อมรอบข้อที่มีรูปตรงกับคำอธิบายต่อไปนี้

รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาวกว่าด้าน BC ส่วนของเส้นตรง CD ตั้งฉากกับด้าน AB และส่วนของเส้นตรง DE ขนานกับด้าน BC

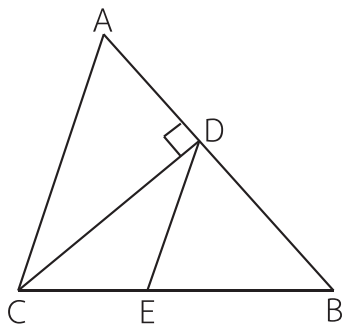
ก.



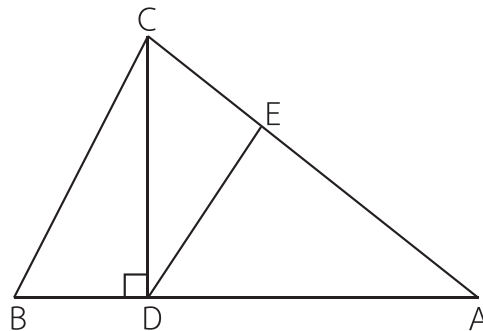
ข.



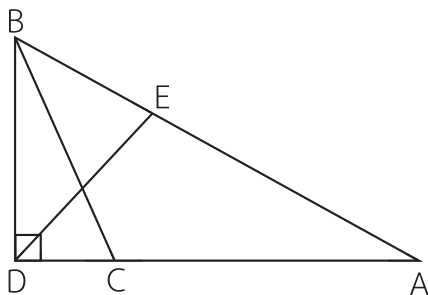
ค.



ง.



จ.



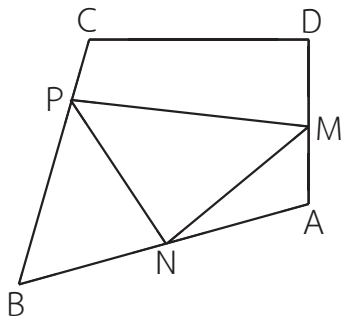
แนวคิด

ในการหาคำตอบข้อนี้ ครูควรฝึกให้นักเรียนวิเคราะห์ตัดข้อที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขโจทย์ โดยพิจารณาทีละเงื่อนไขกับทุกข้อจนเหลือข้อที่สอดคล้องกับทุกเงื่อนไข โจทย์ ซึ่งจะพบว่าคำตอบข้อนี้คือ ข้อ ง.

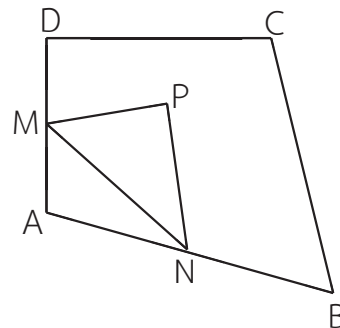
3. จงพิจารณาว่ารูปในข้อใดมีลักษณะตรงตามเงื่อนไข ดังนี้

รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีมุม D เป็นมุมฉาก จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD จุด N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB P เป็นจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมและส่วนของเส้นตรง MP ยาวกว่าส่วนของเส้นตรง MN

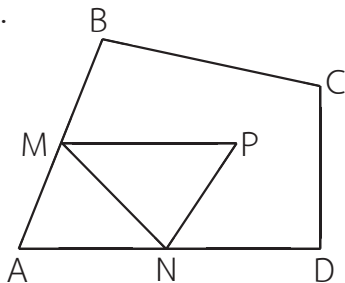
ก.



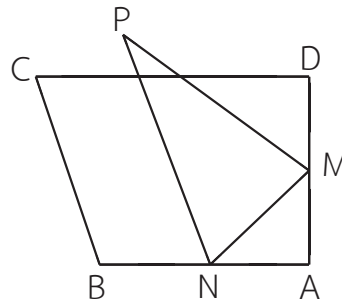
ข.



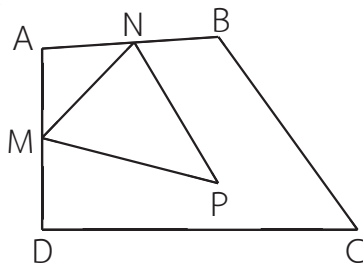
ค.



ง.



จ.



แนวคิด

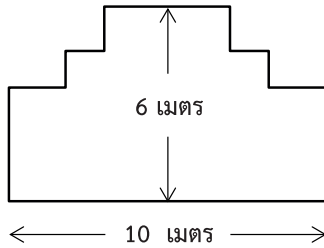
ในการหาคำตอบข้อนี้ ครูควรฝึกให้นักเรียนวิเคราะห์ตัดข้อที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขโจทย์ โดยพิจารณาทีละเงื่อนไขกับทุกข้อจนเหลือข้อที่สอดคล้องกับทุกเงื่อนไข โจทย์ ซึ่งจะพบว่าคำตอบข้อนี้คือ ข้อ จ.

ช่างไม้

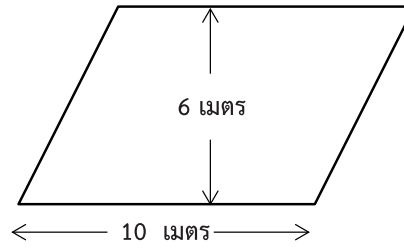


ช่างไม้มีกระดานยาว 32 เมตร และต้องการใช้ไม้นี้ล้อมกรอบสวนหย่อม เขามีแบบสวนหย่อมที่คิดไว้ 4 แบบ ดังนี้

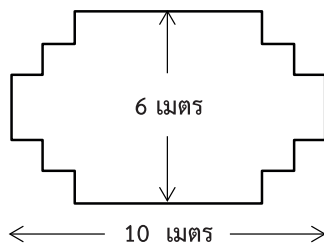
แบบ 1



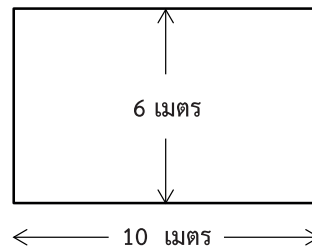
แบบ 2



แบบ 3



แบบ 4



คำถามที่ 1: ช่างไม้

จงเขียนวงกลมรอบคำว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” เพื่อบอกว่าสวนหย่อมแต่ละแบบสามารถล้อมกรอบด้วยไม้กระดาน 32 เมตรนี้ได้ใช่หรือไม่

แบบสวนหย่อม	ตามแบบนี้สามารถล้อมกรอบสวนหย่อมด้วยไม้ 32 เมตร ได้ใช่หรือไม่
แบบ 1	ใช่ / ไม่ใช่
แบบ 2	ใช่ / ไม่ใช่
แบบ 3	ใช่ / ไม่ใช่
แบบ 4	ใช่ / ไม่ใช่

คะแนนเต็ม

ตอบถูกทั้ง 4 ข้อ: ใช่ ไม่ใช่
ใช่ ใช่ ตามลำดับ

ตอบถูกบางส่วน

ตอบถูก 3 ข้อ

ไม่มีคะแนน

ตอบถูก 2 ข้อหรือน้อยกว่า

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริภูมิและรูปทรง

แขนงวิชา : เรขาคณิต

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบเชิงซ้อน

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 37.81

เกาหลี 35.12

ฮ่องกง-จีน 39.92

มาเก๊า-จีน 32.72

ไทย 12.88



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์โจทย์ข้อนี้กล่าวถึงงานช่างไม้ ซึ่งงานช่างนี้เกี่ยวข้องกับการทำกิจกรรมประจำวันของบางครอบครัวที่มีอาชีพเป็นช่างไม้ ช่างก่อสร้าง ที่ต้องมีการคิดคำนวณความยาวของสิ่งที่จะนำมาก่อสร้าง ดังเช่นปัญหานี้ช่างไม้ต้องคำนวณไม้กระดานที่มีความยาว 32 เมตร จะสามารถนำมาล้อมรั้วสวนหย่อมที่มีรูปแบบต่างกันรูปใดได้บ้าง ซึ่งในสถานการณ์นี้มีเจตนาให้นักเรียนวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติที่เป็นแบบจำลองทางเรขาคณิตของสวนหย่อม



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ ความยาวรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยม สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กล่าวว่า “เมื่อเปรียบเทียบความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวที่สุด” ในการแก้ปัญหานักเรียนจะต้องวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติในแต่ละแบบที่โจทย์กำหนดให้ โดยใช้ความสามารถด้านความรู้สึกเชิงปริภูมิ และใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต พิจารณาว่ารูปเรขาคณิตที่มีการหักมุมเป็นมุมฉากตามแนวดิ่งและแนวนอน เช่น รูปแบบ 1 และแบบ 3 ความยาวรอบรูปจะเป็นเช่นเดียวกับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแบบ 4 ทำให้คำนวณได้ง่ายและบอกได้ว่า ความยาวของไม้กระดาน 32 เมตรสามารถนำมาสร้างรั้วได้ตามที่ต้องการ



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

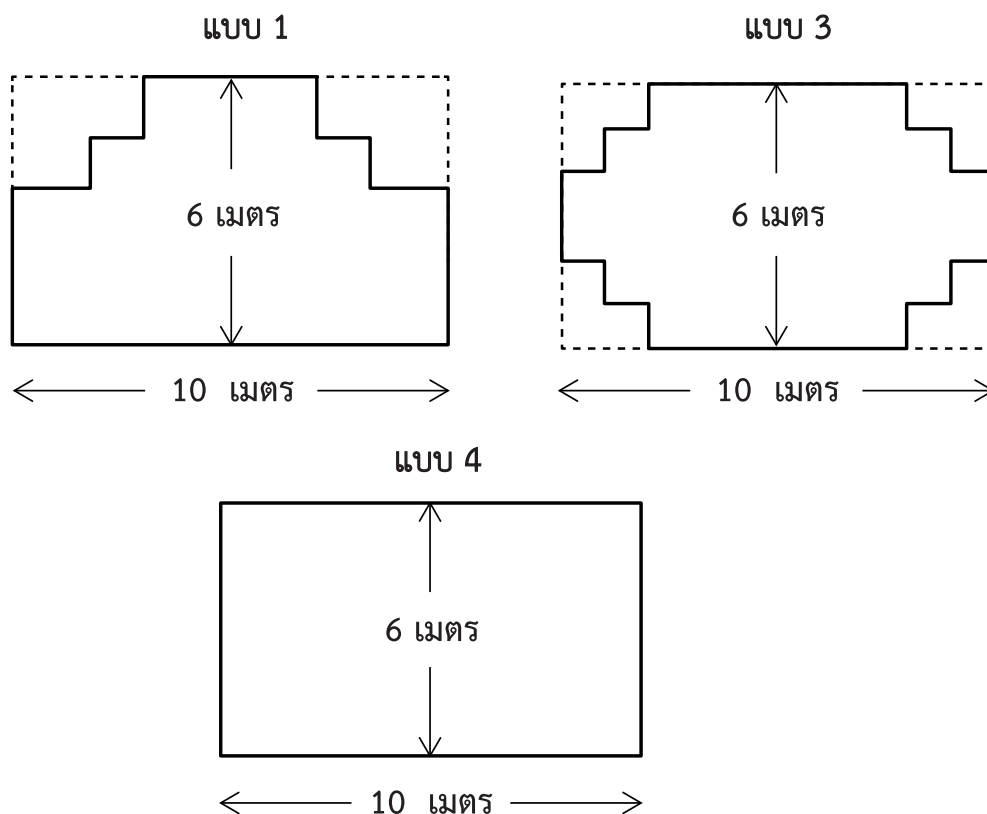


คำถามที่ 1 จงเขียนวงกลมรอบคำว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” เพื่อบอกว่าสวนหย่อมแต่ละแบบสามารถล้อมกรอบด้วยไม้กระดาน 32 เมตรนี้ได้ใช่หรือไม่

แบบสวนหย่อม	ตามแบบนี้สามารถล้อมกรอบสวนหย่อมด้วยไม้ 32 เมตร ได้ ใช่หรือไม่
แบบ 1	ใช่ / ไม่ใช่
แบบ 2	ใช่ / ไม่ใช่
แบบ 3	ใช่ / ไม่ใช่
แบบ 4	ใช่ / ไม่ใช่

จากคำถามโจทย์ที่ให้วิเคราะห์ว่าช่างไม้สามารถนำไม้กระดานยาว 32 เมตร มาตัดต่อความยาวล้อมรอบสวนหย่อมในแต่ละรูปแบบของรูปใดได้บ้าง สำหรับสวนหย่อมแบบ 1 และแบบ 3 สามารถใช้ความรู้สีกเชิงปริภูมิมองเห็นการเชื่อมต่อของไม้กระดานเป็นกรอบรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ดังนี้

แนวคิด พิจารณาแบบ 1 และ แบบ 3 ถ้าลากส่วนของเส้นตรงล้อมรูปให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะเห็นได้ว่าความยาวรอบรูปแต่ละแบบเท่ากับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตามแบบ 4 ดังนี้



จะได้ความยาวรอบรูปของแบบ 1 แบบ 3 และแบบ 4 แต่ละแบบเท่ากับ

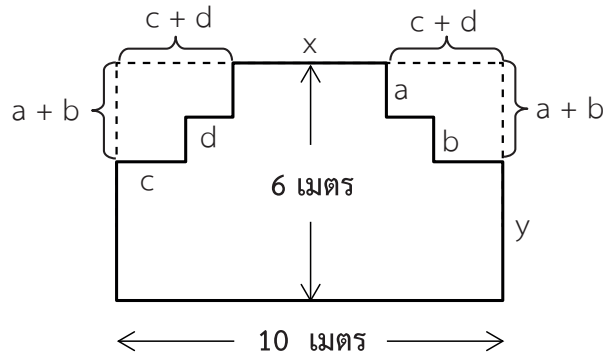
$$\begin{aligned} 2 (\text{ความกว้าง} + \text{ความยาว}) &= 2 (6 + 10) \\ &= 32 \text{ เมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้นสามารถใช้ไม้กระดานยาว 32 เมตร ล้อมรอบสวนหย่อมแบบ 1 แบบ 3 และแบบ 4 ได้

ในการแก้ปัญหาแบบ 1 และแบบ 3 อาจใช้การจินตนาการและการนึกภาพมองส่วนต่อความยาวของส่วนของเส้นตรงในส่วนที่หักมุมตามแนวดิ่งและแนวนอน เชื่อมโยงเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงเดียวกันที่ยาวขึ้น ก็จะได้ความยาวและความกว้างของสวนหย่อมเท่ากับแบบ 4 ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สามารถหาความยาวรอบรูปได้ง่าย

สำหรับนักเรียนที่ไม่สามารถใช้ความรู้สีกเชิงปริภูมิ การจินตนาการและการนึกภาพมองรูปแบบ 1 และรูปแบบ 3 เป็นรูปแบบ 4 ได้ ครูอาจอธิบายการวิเคราะห์ความยาวของส่วนต่อของส่วนของเส้นตรงที่หักมุมของรูป เช่น ในแบบ 1 ดังนี้

แบบ 1



จากรูป ให้ a , b , c , d , x และ y เป็นความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละส่วนที่หักมุมของรูปในแบบ 1

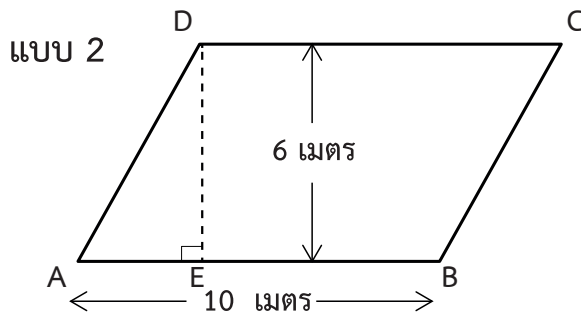
จะได้ ความยาว เท่ากับ $x + 2(c + d) = 10$ เมตร

ความกว้าง เท่ากับ $y + a + b = 6$ เมตร

ดังนั้น ความยาวรอบรูปเท่ากับ $2(\text{ความยาว} + \text{ความกว้าง})$
 $= 2(10 + 6)$ เมตร
 $= 32$ เมตร

จากแนวคิดในมุมมองข้างต้นก็จะสามารถบอกได้เช่นกัน ว่าสามารถนำไม้กระดานยาว 32 เมตร ล้อมรอบสวนหย่อมแบบ 1 และแบบ 3 ได้เช่นเดียวกับแบบ 4

สำหรับ แบบ 2 ไม่สามารถใช้ไม้ยาว 32 เมตรล้อมได้ เนื่องจากเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานยาว 10 เมตร สูง 6 เมตร ดังรูป ด้วยเหตุผลดังนี้



รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD
ลากส่วนสูง DE
จะได้ $AB = 10$ เมตร และ
 $DE = 6$ เมตร

โดยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสก็สามารถวิเคราะห์ได้ว่า $AD > DE$ แสดงว่า $\overline{AD}$ ยาวมากกว่า 6 เมตร ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD จึงมากกว่า $2(10 + 6) = 32$ เมตร

ดังนั้น ช่างไม้ไม่สามารถใช้ไม้กระดานยาว 32 เมตร ล้อมกรอบสวนหย่อมแบบ 2 ได้



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

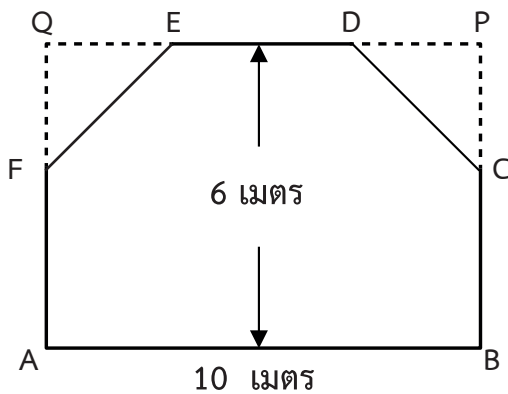
1. มีข้อสังเกตเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนไทยและประเทศอื่น ๆ ที่ทำข้อสอบได้ถูกต้องต่ำกว่า 50 เปอร์เซนต์ของนักเรียนที่เข้าสอบแต่ละชาติตามที่ระบุ น่าจะมีผลจากการไม่คุ้นเคยการวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติในลักษณะของสถานการณ์นี้ และยังขาดความสามารถทางด้านความรู้สึกเชิงปริภูมิและการนิกภาพเกี่ยวกับเรื่องที่กำลังกล่าวมาด้วย

ในการเรียนการสอนครูควรหารูปเรขาคณิตสองมิติที่ต้องอาศัยการจินตนาการหรือการนิกภาพ โดยการเขียนส่วนของรูปที่กำหนดให้เป็นรูปเรขาคณิตสองมิติที่ง่ายต่อการคำนวณหาคำตอบมาฝึกเพิ่มเติม

2. ครูอาจเสริมแนวคิดวิเคราะห์เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการมองรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีความยาวรอบรูปน้อยกว่าความยาวรอบรูปของแบบ 4 โดยกำหนดรูปหลายเหลี่ยม ABCDEF ดังรูป เป็นแบบ 5 และใช้สถานการณ์โจทย์เดิม ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหาคำตอบและบอกเหตุผล



แนวคิด

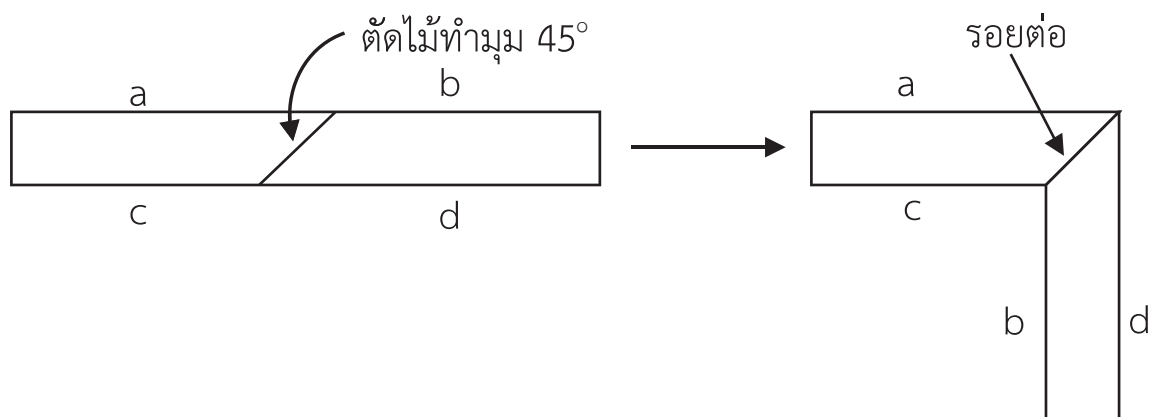


จากการพิจารณา $\triangle CPD$
 จะได้ $CP + PD > CD$ ตามสมบัติของ
 รูปสามเหลี่ยม ที่กล่าวว่า “ผลบวกของ
 ความยาวของด้านสองด้าน ของรูปสามเหลี่ยม
 ยาวกว่าด้านที่สาม”

จากเหตุผลข้างต้นจึงสรุปได้ว่า ความยาวรอบรูป ABCDEF น้อยกว่าความยาว
 รอบรูป ABPQ

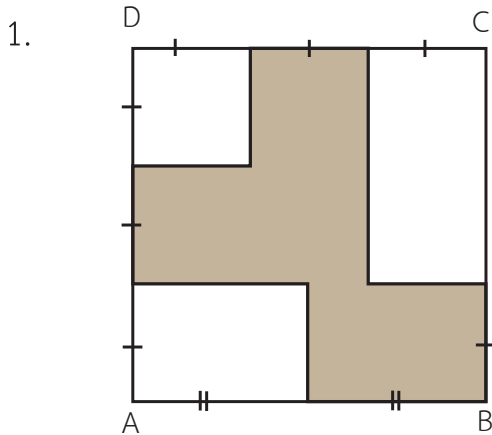
ดังนั้น สามารถใช้ไม้กระดานยาว 32 เมตร ล้อมรอบสวนหย่อมแบบ 5 ได้

3. ครูอาจให้ความรู้เกี่ยวกับการตัดต่อไม้กระดานให้ได้มุมเป็นมุมฉากตามวิธีของ
 ช่างไม้ว่าในการสร้างรั้วตามแบบ 1 แบบ 3 และแบบ 4 ด้วยไม้กระดาน ซึ่งไม้กระดาน
 จะมีความกว้างต่างจากการนำขดลวดมาหุ้มเป็นมุมฉาก ช่างไม้จำเป็นต้องมีวิธีการตัด
 ไม้ที่ไม่ให้เสียเนื้อไม้และต่อให้ได้มุมฉาก โดยช่างไม้จะต้องตัดไม้โดยทำมุม 45° แล้วนำ
 ปลายไม้ส่วนที่ตัดทั้งสองชิ้นมาประกบกันเป็นมุมฉากดังรูป จึงจะทำให้ไม้กระดานยาว
 32 เมตร พอใช้ในการล้อมรอบสวนหย่อมตามแบบ 1 แบบ 3 และแบบ 4



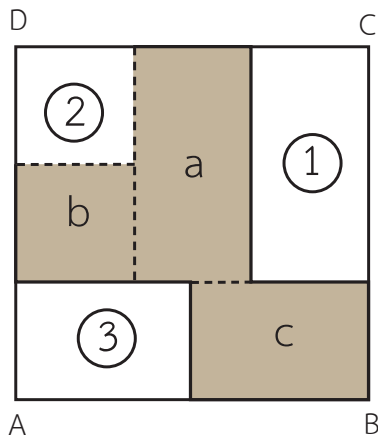


ครูอาจฝึกให้นักเรียนได้คุ้นเคยการแก้ปัญหาในทำนองเดียวกันกับปัญหา“ช่างไม้” ฝึกการนิยามภาพและใช้ความรู้เกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิตหารูปที่ง่ายต่อการคำนวณ ดังต่อไปนี้



วินัยตัดแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ที่มีด้านยาว 36 เซนติเมตร ให้ได้ชิ้นส่วนตามรูปที่แรเงาและมีขนาดดังรูป จงหาพื้นที่ของชิ้นส่วนที่แรเงา

แนวคิด



นิยามส่วนต่อของรูปตามแนวเส้นประ (ดังรูป)

จะได้พื้นที่ของรูป ① เท่ากับพื้นที่ของรูป a
พื้นที่ของรูป ② เท่ากับพื้นที่ของรูป b
และ พื้นที่ของรูป ③ เท่ากับพื้นที่ของรูป c

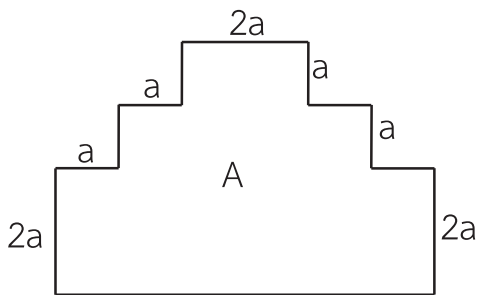
แสดงว่า ผลบวกของพื้นที่ของรูป a, b และ c เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูป ①, ② และ ③

จะได้ พื้นที่ของชิ้นส่วนที่แรเงาเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

ดังนั้น พื้นที่ของชิ้นส่วนที่แรเงา เท่ากับ $\frac{1}{2} \times 36 \times 36$
= 648 ตารางเซนติเมตร

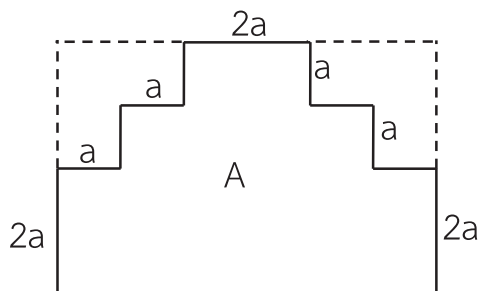


2.



กำหนดให้รูป A มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 80 เซนติเมตร a และ $2a$ แทนความยาวของด้านต่าง ๆ ดังรูป จงหาพื้นที่ของรูป A

แนวคิด



เขียนเส้นประต่อรูป A ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทำให้ได้

ความกว้าง $4a$ และความยาว $6a$

$$\text{ความยาวรอบรูปเท่ากับ } 2(4a + 6a) = 20a$$

$$\text{จะได้ } 20a = 80$$

$$a = \frac{80}{20}$$

$$\text{ดังนั้น } a = 4 \text{ เซนติเมตร}$$

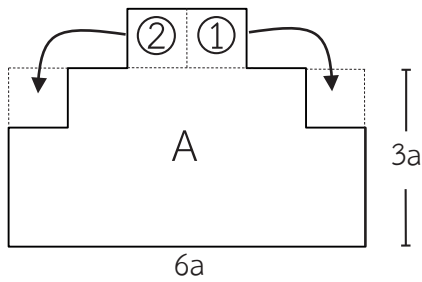
หาพื้นที่ของรูป A โดยการลบส่วนที่ตัดออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับ $4a \times 6a = 24a^2$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของรูป A} &= 24a^2 - 2(3a^2) \\ &= 24a^2 - 6a^2 \\ &= 18a^2 \\ &= 18 \times 4^2 \\ &= 18 \times 16 \\ &= 288 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$





ข้อเสนอแนะ สำหรับการหาพื้นที่ของรูป A



อาจเขียนเส้นประแบ่งรูป A และใช้การหมุน รูป ① และรูป ② มาปิดช่องว่าง ทำให้ได้ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง $3a$ และความยาว $6a$ ดังรูป

พื้นที่ของรูป A เท่ากับ $6a \times 3a = 18a^2$

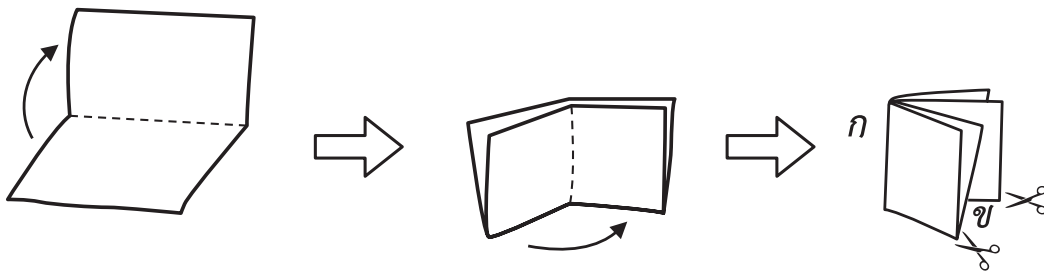
จากแนวคิดข้างต้น ได้ a ยาว 4 เซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ของรูป A = 18×16

= 288 ตารางเซนติเมตร

3. ปัญหา “การเข้าเล่ม” จากข้อสอบ PISA ปี ค.ศ. 2006

คำถามที่ 1 การเข้าเล่ม

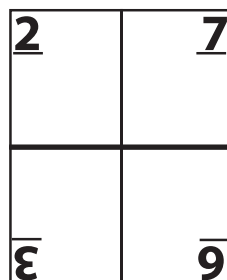


รูป 1 แสดงวิธีการทำสมุดเล่มเล็ก โดยมีขั้นตอนดังนี้

- นำกระดาษแผ่นหนึ่งมาพับครึ่งสองครั้ง
- เย็บลวดที่ขอบ ก
- ตัดกระดาษที่ขอบ ข สองขอบให้เปิดออก

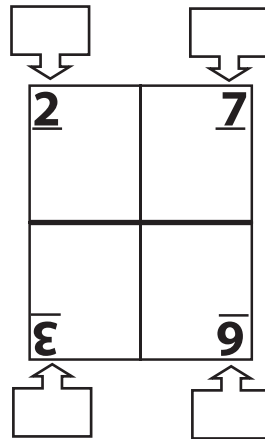
จะได้ สมุดเล่มเล็กที่มีแปดหน้า ดังรูป 2

รูป 2

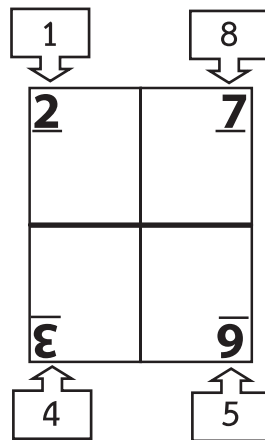




รูป 2 แสดงด้านหนึ่งของกระดาษที่ทำเป็นสมุด ซึ่งมีเลขหน้าเขียนไว้ก่อนแล้ว
เส้นหนาคือกระดาษส่วนที่ถูกตัดหลังจากพับแล้ว
จงเขียนหมายเลข 1, 4, 5 และ 8 ลงในกรอบของแผนผังให้ถูกต้อง เพื่อแสดงว่า
หน้าใดอยู่ด้านหลังของหน้า 2, 3, 6 และ 7



เฉลย เลขหน้าถูกใส่ในตำแหน่งที่ถูกต้อง (ไม่ต้องสนใจว่าหมายเลขจะหัวกลับ)



แนวคิด

โดยปกติเลขหน้าหนังสือจะเรียงลำดับต่อเนื่องกัน

ดังนั้น เลขหน้าที่ไม่ปรากฏในหน้าสมุด 2, 3, 6, 7 ก็จะต้องอยู่ด้านหลัง
ของเลขหน้าเหล่านี้ ซึ่งจะเป็นตัวเลขก่อนหรือหลังดังนี้

เลขหน้า 1 ต้องคู่กับ เลขหน้า 2

เลขหน้า 4 ต้องคู่กับ เลขหน้า 3

เลขหน้า 5 ต้องคู่กับ เลขหน้า 6

เลขหน้า 8 ต้องคู่กับ เลขหน้า 7



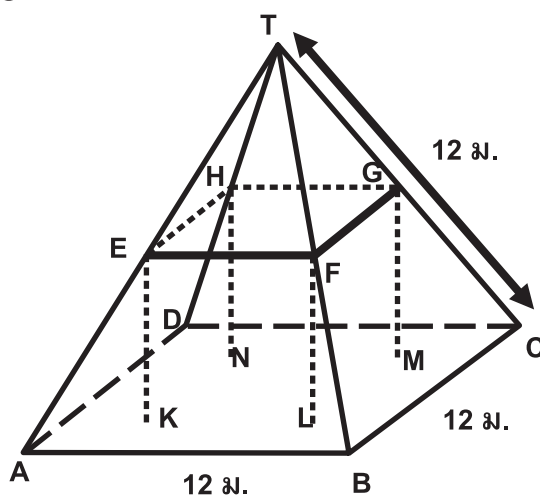
อนึ่งถ้าครูนำปัญหานี้ไปให้นักเรียนทำ ควรให้นักเรียนจินตนาการนึกภาพหรือคาดคะเนบอกเลขหน้าที่อยู่หน้าหลังของหน้าที่มองเห็นก่อน หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำกิจกรรมใช้กระดาษ A4 เขียนเลขหน้าตามโจทย์และเลขหน้าด้านหลังตามที่นึกไว้เสร็จแล้วให้นักเรียนลองตัดกระดาษตามขั้นตอนรูป 1 ตรวจสอบว่าหน้าสมุดเล่มเล็กเรียงหน้าได้ถูกต้องจริงหรือไม่



โรงงานหลังหนึ่งมีหลังคาเป็นทรงพีระมิด ดังรูป



และข้างล่างเป็นรูปที่นักเรียนคณิตศาสตร์ ทำแบบจำลองของหลังคา พร้อมกับบอกระยะกำกับไว้ด้วย



พื้นเพดาน ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส คานที่รองรับน้ำหนักของหลังคา คือขอบของรูปเหลี่ยมทรงตัน EFGHKL MN (ปริซึมรูปสี่เหลี่ยม) E เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{AT}$ จุด F เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{BT}$ จุด G เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{CT}$ จุด H เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{DT}$ สันของพีระมิดทุกด้านยาว 12 เมตรเท่ากัน

คำถามที่ 1 : โรงงาน

จงคำนวณพื้นที่เพดาน ABCD

พื้นที่ของพื้นเพดาน ABCD = _____ ตารางเมตร

คะแนนเต็ม

ตอบ 144 (ให้หน่วยมาแล้ว)

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริภูมิและรูปทรง

แขนงวิชา : การวัด

สถานการณ์ : ในเชิงอาชีพ

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 81.60

เกาหลี 70.90

ฮ่องกง-จีน 83.80

ไทย 31.70

คำถามที่ 2 : โรงงาน

จงคำนวณความยาวของส่วนของเส้นตรง EF

ความยาวของส่วนของเส้นตรง EF = _____ เมตร

คะแนนเต็ม

ตอบ 6 (ให้หน่วยมาแล้ว)

ไม่มีคะแนน

ตอบถูก 2 ข้อหรือน้อยกว่า

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริภูมิและรูปทรง

แขนงวิชา : การวัด

สถานการณ์ : ในเชิงอาชีพ

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 85.60

เกาหลี 80.00

ฮ่องกง-จีน 77.20

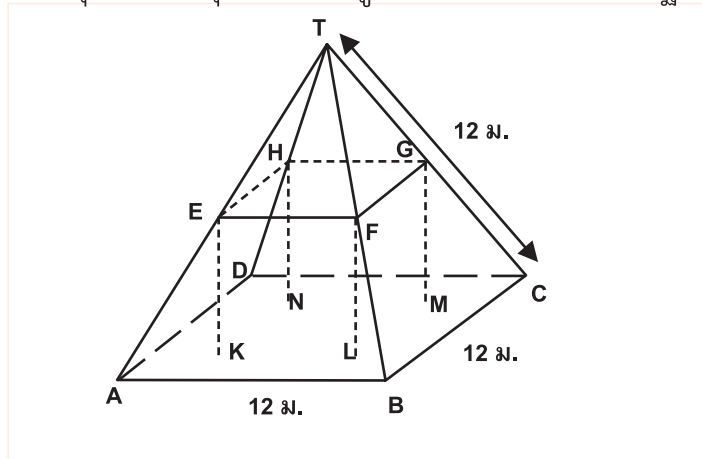
ไทย 54.70

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

ในสถานการณ์โจทย์ข้อนี้ กล่าวถึงโรงงานหลังหนึ่งที่มีหลังคามีลักษณะเป็นทรงพีระมิด เมื่อนักเรียนคณิตศาสตร์ทำแบบจำลองของหลังคา พร้อมกับบอกระยะกำกับไว้จะได้รูปทรงพีระมิดที่มีจุด T เป็นจุดยอดและรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นฐานดังนี้



พื้นเพดาน ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คานที่รองรับน้ำหนักของหลังคามีลักษณะเป็นขอบของรูปเหลี่ยมทรงตัน EFGHKL ซึ่งเป็นปริซึมฐานสี่เหลี่ยม จุด E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางของเส้น AT, BT, CT และ DT ตามลำดับ

จากรูป เส้นของพีระมิดทุกเส้นยาว 12 เมตรเท่ากัน และพื้นเพดาน ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 12 เมตร โจทย์ให้คำนวณหาพื้นที่ของพื้นเพดาน ABCD และความยาวของส่วนของเส้นตรง EF



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ

1. **ความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ** นักเรียนต้องใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิในการมองภาพด้านหน้า ด้านข้างและด้านบนของพีระมิด ที่ได้ว่าภาพด้านหน้าและด้านข้าง เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ $\triangle TAB$, $\triangle TBC$, $\triangle TCD$ และ $\triangle TDA$ ในขณะที่ภาพด้านบนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD

2. **พื้นที่ผิวและปริมาตร** นักเรียนต้องหาพื้นที่ฐานของพีระมิดในการตอบคำถามข้อ 1 ซึ่งให้คำนวณหาพื้นที่ของเพดาน ABCD ที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



3. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมใดๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้จุด E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางของแต่ละด้าน นักเรียนอาจใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่กล่าวว่า “ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม” ในการตอบคำถามข้อ 2 โดยสมบัติดังกล่าวข้างต้น จะได้ว่า EF ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ $\overline{AB}$ สมบัตินี้ นักเรียนบางคนอาจไม่ได้เรียนมาก่อน เนื่องจากเป็นเนื้อหาที่อยู่ในสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ถ้าครูนำโจทย์ข้อนี้มาใช้กับนักเรียน ครูอาจสอนสมบัติดังกล่าวเพิ่มเติมก็ได้

4. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสมบัติของสามเหลี่ยมรูปด้านเท่า
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากัน 2 ด้าน ซึ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนี้จะมีมุมที่ฐานเท่ากัน 2 มุม สำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่ด้านเท่ากันทุกด้าน ซึ่งมุมภายในทุกมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะมีขนาด 60 องศา



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 จงคำนวณพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD = ตารางเมตร

แนวคิด โจทย์บรรทัดแรก สั่งนักเรียนว่า จงคำนวณพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีแต่ละด้านยาว 12 เมตร

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ 12×12

= 144 ตารางเมตร



คำถามที่ 2 จงคำนวณความยาวของส่วนของเส้นตรง EF การหาคำตอบข้อนี้ นักเรียนสามารถทำได้ 2 แนวคิด ดังนี้

แนวคิด 1 ถ้านักเรียนทราบถึงสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่กล่าวว่า “ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของ รูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สาม และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม”

$$\begin{aligned} \text{นักเรียนจะสามารถตอบคำถามได้ว่า } EF &= \frac{1}{2} \text{ ของ } AB \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \\ \text{นั่นคือ } EF &= 6 \text{ เมตร} \end{aligned}$$

แนวคิด 2 ถ้านักเรียนไม่ทราบถึงสมบัติของรูปสามเหลี่ยมตามแนวคิด 1 นักเรียนสามารถใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ได้ดังนี้

เนื่องจาก จุด E และ จุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{TA}$ และ $\overline{TB}$ ตามลำดับ
จะได้ $TE = TF = \frac{12}{2} = 6$ เมตร
ดังนั้น $\triangle TEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
(รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
เนื่องจาก $\triangle TAB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
จะได้ $\hat{ATB} = \hat{TAB} = \hat{TBA} = 60^\circ$
(มุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีขนาดเท่ากับ 60°)
ดังนั้น $\hat{ETF} = \hat{ATB} = 60^\circ$
($\hat{ETF}$ และ $\hat{ATB}$ เป็นมุมเดียวกัน)
เนื่องจาก $\hat{TEF} = \hat{TFE}$
(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีขนาดเท่ากัน)
จะได้ $\hat{TEF} = \hat{TFE} = 60^\circ$
(มุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม มีขนาดรวมกัน เท่ากับ 180°)
ดังนั้น $\triangle TEF$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
($\hat{ETF} = 60^\circ, \hat{TEF} = \hat{TFE} = 60^\circ$)
จะได้ $TE = EF = TF = 6$
นั่นคือ EF เท่ากับ 6 เมตร



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

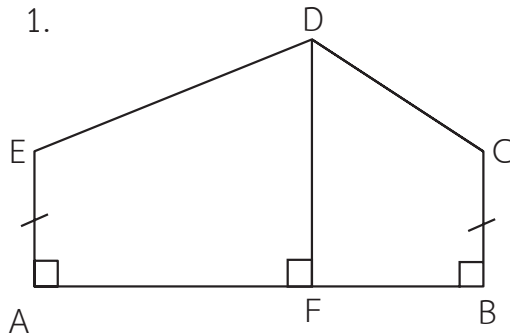
จากการที่นักเรียนไทยตอบคำถามที่ 1 ได้ถูกต้องเพียง 31.70 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ข้อสันนิษฐานประการหนึ่งที่นักเรียนตอบไม่ได้ อาจเป็นเพราะไม่เข้าใจว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ที่เห็นในรูปเป็นฐานของพีระมิด นั่น คือ เพดานของโรงงาน ซึ่งแสดงว่านักเรียนไม่สามารถใช้การนิยามและความรู้สึกเชิงปริภูมิถอดโครงสร้างของหลังคาโรงงาน มาเป็นรูปของทรงสามมิติที่กำหนดให้ได้

สำหรับคำถามที่ 2 ที่นักเรียนไทยมากกว่าครึ่งเพียงเล็กน้อยของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบตอบได้ถูกต้อง ก็น่าจะเป็นเพราะว่าไม่ทราบสมบัติของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ กับเส้นต่อจุดกึ่งกลางด้านตามที่ระบุมาข้างต้น ซึ่งถ้าไม่ทราบก็อาจขาดความพยายามหาคำตอบโดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า อย่างไรก็ตาม หลังจากนักเรียนเข้าใจแนวคิดในการแก้ปัญหาสถานการณ์นี้แล้ว ครูอาจขยายความรู้ต่อได้ว่า แม้ว่าโจทย์จะกำหนดจุด E, F, G และ H ไม่ใช่จุดกึ่งกลางของเส้น เช่น ให้ จุด E และ จุด F เป็นจุดที่ทำให้ $TE : EA = 2 : 3$ และ $TF : FB = 2 : 3$ นักเรียนก็สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า หาความยาวของ EF ได้ว่ามีค่าความยาวเป็น $\frac{2}{3}$ ของ AB เช่นกัน และให้สังเกตว่าโจทย์ใช้สัญลักษณ์แสดงส่วนของเส้นตรงแตกต่างจากที่ใช้ในหนังสือเรียน โดยขีดเส้นใต้ตัวอักษร เช่น เขียน $\underline{AT}$ แทนการเขียนเป็น $\overline{AT}$ ครูควรแจ้งให้นักเรียนทราบว่า หนังสือคณิตศาสตร์บางเล่มและโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลายข้อ อาจใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ กัน นักเรียนต้องหัดวิเคราะห์คาดเดาให้ถูกต้องว่า สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เหล่านั้นแทนสิ่งใดตามที่เคยเรียนมาแล้ว

นอกจากนี้ครูควรใช้การสนทนาชี้แนะให้นักเรียนหัดเป็นคนช่างสังเกตและหาความรู้รอบตัวเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อมใกล้ตัว ดังเช่นในสถานการณ์นี้ ครูอาจบอกนักเรียนให้ไปศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นโครงสร้างของหลังคา เช่น ช่อแป คาน จั่ว เพดาน และชายคา การศึกษานี้อาจให้นักเรียนมองได้ทั้งในแง่ของคณิตศาสตร์ ศิลปะ และประโยชน์ของการใช้งาน ซึ่งเป็นการฝึกเกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และความรู้สึกเชิงปริภูมิ



ครูอาจหาโจทย์ให้นักเรียนได้ฝึกเพิ่มเติม ดังตัวอย่างโจทย์ดังนี้



ฝาผนังด้านข้างของบ้านวิทยามีลักษณะ
ดังรูป ABCDE ความยาวของด้านต่าง ๆ
เป็นดังนี้ $AE = BC = 3$ เมตร
 $DE = 6.5$ เมตร $AB = 10$ เมตร และ
 $DF = 5.5$ เมตร

คำถามที่ 1 จงหาความยาวของ $\overline{AF}$

แนวคิด

$$\begin{aligned} AF^2 &= DE^2 - (DF - BC)^2 \\ &= 6.5^2 - (5.5 - 3)^2 \\ &= 6.5^2 - (2.5)^2 \\ &= 42.25 - 6.25 \\ &= 36 \end{aligned}$$

ดังนั้น $AF = 6$ เมตร

คำถามที่ 2 ถ้าวิทยาต้องการทาสีฝาผนังด้านข้างนี้ บริเวณที่ต้องทาสีคิดเป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร

แนวคิด รูป ABCDE ประกอบด้วย รูปสี่เหลี่ยมคางหมู AEDF และ
รูปสี่เหลี่ยมคางหมู BCDF

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของรูป ABCDE} &= \text{พื้นที่ของรูป AEDF} + \text{พื้นที่ของรูป BCDF} \\ &= \left[\frac{1}{2} \times 6 (3 + 5.5) \right] + \left[\frac{1}{2} \times 4 (3 + 5.5) \right] \\ &= \frac{1}{2} \times (3 + 5.5) \times (6 + 4) \\ &= 5 \times 8.5 \\ &= 42.5 \end{aligned}$$

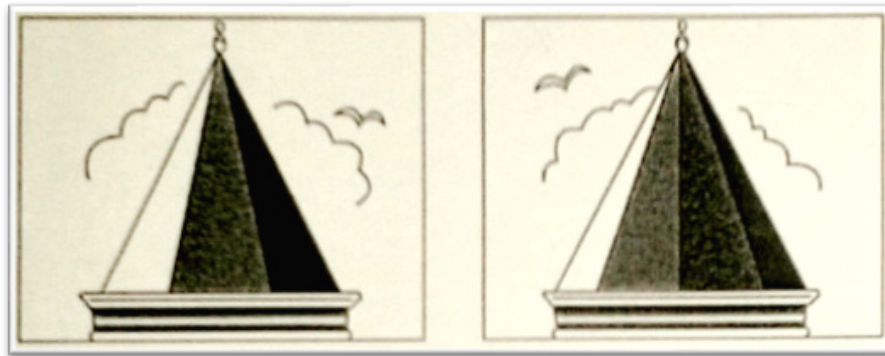
ดังนั้น ฝาผนังที่ต้องทาสีมีพื้นที่ 42.5 ตารางเมตร



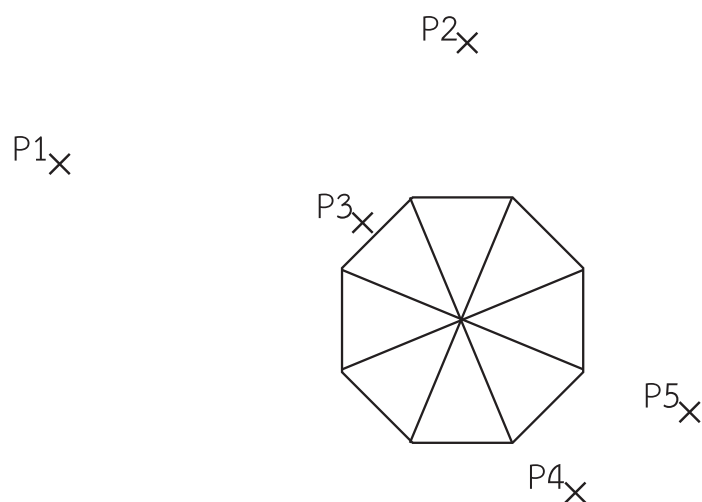
2. ปัญหา “การเห็นหอสูง” จากข้อสอบ PISA ปี ค.ศ. 2006

? คำถามที่ 1 การเห็นหอสูง

รูป 1 และรูป 2 ข้างล่าง เป็นภาพวาดของหอสูงเหมือนกันทั้งสองรูป
ในรูป 1 นักเรียนเห็นหลังคาของหอสูงสามด้าน ในรูป 2 เห็นสี่ด้าน



แผนผังต่อไปนี้ แสดงภาพของหลังคาหอสูงที่มองลงจากข้างบน P1 – P5 เป็นตำแหน่งต่าง ๆ ห้าตำแหน่ง ซึ่งแสดงด้วยเครื่องหมายกากบาท (X) ณ ตำแหน่งบนพื้นดินเหล่านี้ ผู้ที่มองดูหอสูงจะสามารถมองเห็นจำนวนด้านของหลังคาได้ต่างกัน





จงเขียนวงกลมแสดงจำนวนด้านของหลังคาที่จะสามารถมองเห็นได้จาก
ตำแหน่งต่าง ๆ ในตารางข้างล่าง

ตำแหน่ง	จำนวนด้านของหลังคาที่สามารถมองเห็นจากตำแหน่งต่าง ๆ (จงวงรอบจำนวนที่ถูกต้อง)				
P1	1	2	3	4	มากกว่า 4
P2	1	2	3	4	มากกว่า 4
P3	1	2	3	4	มากกว่า 4
P4	1	2	3	4	มากกว่า 4
P5	1	2	3	4	มากกว่า 4

เฉลย

ตำแหน่ง	จำนวนด้านของหลังคาที่สามารถมองเห็นจากตำแหน่งต่าง ๆ (จงวงรอบจำนวนที่ถูกต้อง)				
P1	1	2	3	4	มากกว่า 4
P2	1	2	3	4	มากกว่า 4
P3	1	2	3	4	มากกว่า 4
P4	1	2	3	4	มากกว่า 4
P5	1	2	3	4	มากกว่า 4



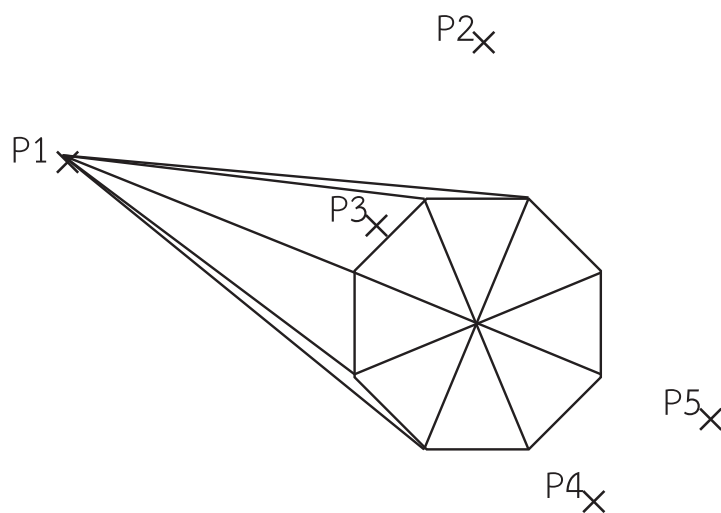
แนวคิด

การมองเห็นด้านของหลังคาว่าสามารถมองเห็นได้ก็ด้านนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่มองและระยะห่างระหว่างตำแหน่งที่มองกับฐานของหลังคาสูง

วิธีหาคำตอบ

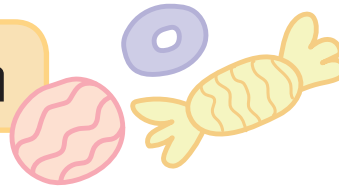
ใช้การลากส่วนของเส้นตรงจากจุดที่มองไปยังจุดมุมของฐานหลังคาให้ได้มากที่สุดโดยแต่ละเส้นไม่ตัดด้านใดด้านหนึ่งของฐาน แล้วนับรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่ได้จะเท่ากับจำนวนด้านของหลังคาที่จะสามารถมองเห็นได้จากตำแหน่งที่มอง

ตัวอย่าง จากตำแหน่งจุด P1 เมื่อลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุดมุมของฐานโดยไม่ตัดด้านใดด้านหนึ่งของฐาน จะได้รูปสามเหลี่ยม 4 รูป ดังรูป



ดังนั้น จากจุด P1 สามารถมองเห็นด้านของหลังคาได้ 4 ด้าน

ลูกอมสีต่างๆ



แม่ให้เรวัตหยิบลูกอมหนึ่งลูกจากถุง โดยเขามองไม่เห็นลูกอม จำนวนของลูกอมแต่ละสีที่อยู่ในถุง แสดงในกราฟต่อไปนี้

คำถามที่ 1 : ลูกอมสีต่างๆ

จงหาความน่าจะเป็นที่เรวัตจะหยิบได้ลูกอมสีแดง

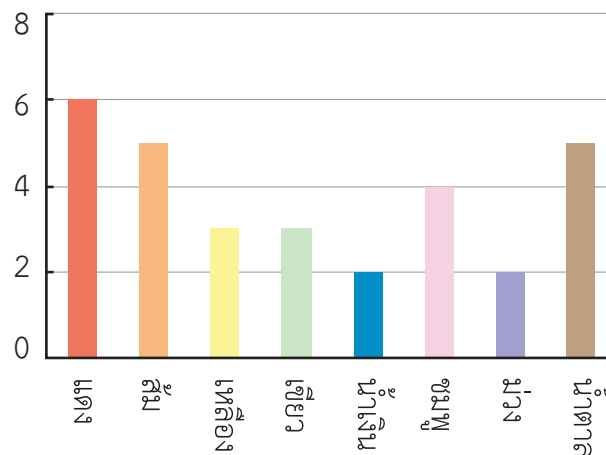
1. 10%
2. 20%
3. 25%
4. 50%

คะแนนเต็ม

ตอบ ข้อ 2. 20%

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ



ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : ความน่าจะเป็น

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 63.99

เกาหลี 72.82

ฮ่องกง-จีน 71.60

มาเก๊า-จีน 56.32

ไทย 24.92





สถานการณ์โจทย์

โจทย์กำหนดให้หิบลูกอมหนึ่งลูกจากถุงโดยมองไม่เห็นลูกอม และใช้กราฟแท่งแสดงจำนวนลูกอมแต่ละสีที่อยู่ในถุงนั้น แล้วให้หาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกอมสีแดง โดยมีคำตอบให้เลือกในรูปเปอร์เซ็นต์

เนื่องจากสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้เป็นการเชื่อมโยงความรู้เรื่องกราฟ ความน่าจะเป็น และร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ในการแก้ปัญหา โดยกำหนดข้อมูลที่ต้องใช้ในการหาความน่าจะเป็นในรูปของกราฟแท่ง และกำหนดคำตอบให้เลือกในรูปของเปอร์เซ็นต์ ซึ่งแตกต่างจากสถานการณ์ที่นักเรียนคุ้นเคย นักเรียนต้องมีความเข้าใจและสามารถประยุกต์ใช้ทุกเรื่องที่เกี่ยวข้องจึงจะทำโจทย์ข้อนี้ได้



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ

1. การอ่านและแปลความหมายจากการนำเสนอข้อมูลในรูปกราฟแท่งหรือแผนภูมิแท่ง เพื่อหาจำนวนลูกอมสีต่าง ๆ ในถุง

2. การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ซึ่งหาได้จาก

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ $\frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น}}$

3. ความรู้เกี่ยวกับเศษส่วนที่เท่ากัน และการเขียนเศษส่วนในรูปของร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ เช่น

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} \text{ เขียนได้เป็นร้อยละ 50 หรือ 50\%}$$

4. ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ในข้อ 1-3 เพื่อหาคำตอบ



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1

จงหาความน่าจะเป็นที่เรวัตจะหยิบได้ลูกอมสีแดง

1. 10%
2. 20%
3. 25%
4. 50%

แนวคิด

โจทย์ต้องการให้หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกอมสีแดง ในการหยิบลูกอมหนึ่งลูกจากถุงโดยไม่เห็นลูกอม

เนื่องจาก ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ

$$\frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น}}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกอมสีแดง

$$= \frac{\text{จำนวนลูกอมสีแดง}}{\text{จำนวนลูกอมทั้งหมดในถุง}}$$

โจทย์แสดงจำนวนลูกอมแต่ละสีด้วยกราฟแท่ง ซึ่งอ่านจำนวนลูกอมแต่ละสีจากกราฟแท่งได้ดังนี้

จำนวนลูกอมสีแดง 6 ลูก สีส้ม 5 ลูก สีเหลือง 3 ลูก สีเขียว 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก สีชมพู 4 ลูก สีม่วง 2 ลูก และสีน้ำตาล 5 ลูก

รวมลูกอมทุกสีในถุงเท่ากับ $6 + 5 + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 5 = 30$ ลูก

เหตุการณ์ที่สนใจ คือ หยิบได้ลูกอมสีแดง ซึ่งมีทั้งหมด 6 ลูก

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกอมสีแดง เท่ากับ $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ หรือ 0.2

แต่คำตอบที่มีให้เลือกเขียนอยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์

และ $\frac{1}{5} = \frac{50}{100}$ เขียนได้เป็น 20%

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เรวัตจะหยิบได้ลูกอมสีแดงเท่ากับ 20%



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กำหนดให้นักเรียนได้เรียนรู้เรื่องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนบางกลุ่มที่เข้าสอบข้อสอบ PISA จึงอาจยังไม่ได้เรียนรู้เรื่องการหาความน่าจะเป็นโดยตรง แต่ด้วยสามัญสำนึกที่นักเรียนได้เคยพบเห็น หรือได้เรียนรู้เกี่ยวกับการคาดการณ์ หรือโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันว่าเหตุการณ์นั้น ๆ มีโอกาสเกิดขึ้นได้หรือไม่ หรือมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด โดยอาศัยความสามารถด้านความรู้เชิงจำนวนและสามัญสำนึกเกี่ยวกับความน่าจะเป็น ซึ่งการคาดการณ์ดังกล่าวเรามักพบในรูปแบบของร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ เช่น โอกาสที่จะชนะ คือ ห้าสิบห้าสิบ หรือหกสิบสี่สิบ ด้วยประสบการณ์ดังกล่าวนักเรียนที่ไม่เคยเรียนเรื่องการหาความน่าจะเป็น ก็อาจทำโจทย์ข้อนี้ได้ เพราะคำตอบที่ให้เลือกอยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์ เมื่อมีลูกอมสีแดง 6 ลูก จากจำนวนลูกอมทั้งหมด 30 ลูก โดยอาศัยความรู้เชิงจำนวนที่ว่า $6 : 30 = 2 : 10 = 20 : 100$ และสามัญสำนึกเกี่ยวกับโอกาสหรือความน่าจะเป็นย่อมสรุปคำตอบได้ว่า โอกาสหรือความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกอมสีแดงเท่ากับ 20%

จากผลการสอบพบว่า นักเรียนไทยตอบคำถามได้ถูกต้องเพียง 24.92 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ทั้งนี้อาจเป็นผลมาจากนักเรียนบางส่วนไม่ทราบความหมายของคำว่า “ความน่าจะเป็น” เนื่องจากนักเรียนยังไม่ได้เรียนเรื่องนี้โดยตรง จึงไม่ทราบวิธีการหาคำตอบ หรือนักเรียนบางส่วนอาจไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้เรื่องกราฟแท่งกับการหาจำนวนลูกอมสีต่าง ๆ ในถุง รวมถึงการกำหนดตัวเลือกที่เป็นคำตอบในรูปแบบของร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ ก็อาจทำให้นักเรียนสับสน เพราะความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หาได้จาก
$$\frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น}}$$
 ซึ่งส่วนใหญ่คำตอบจะอยู่ในรูปของเศษส่วน นักเรียนจึงคุ้นเคยกับค่าความน่าจะเป็นที่อยู่ในรูปของเศษส่วน เมื่อพบคำตอบที่อยู่ในรูปเปอร์เซ็นต์จึงเกิดความไม่แน่ใจในการหาคำตอบ ทำให้ไม่พยายามในการหาคำตอบของโจทย์ข้อนี้ แม้ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ที่พัฒนาโดย สสวท. จะมีข้อสรุปไว้ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อาจเขียนได้ในรูปของเศษส่วน ทศนิยม ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ เช่น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 1 เหรียญแล้วออกก้อย เท่ากับ $\frac{1}{2}$ หรือ 0.5 หรือ 50% แต่ในทางปฏิบัติก็ไม่ได้ใช้คำตอบในรูปร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ จึงทำให้นักเรียนไม่คุ้นเคยกับค่าความน่าจะเป็นในรูปเปอร์เซ็นต์ แต่ถ้านักเรียนรู้จักสังเกตและเชื่อมโยงความรู้กับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน เช่น การพยากรณ์อากาศจะได้ยินอยู่เป็นประจำว่า โอกาสที่ฝนจะตกเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ คำกล่าวนี้หมายถึงความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกเป็น



ก็เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่นั่นเอง ดังนั้นในการเรียนการสอน ครูต้องให้ความสำคัญกับการเชื่อมโยงความรู้ไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตจริงด้วย

อย่างไรก็ตามแม้นักเรียนจะมีความรู้ที่ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์สามารถเขียนได้ในรูปร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ แต่ถ้านักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยงระหว่างเปอร์เซ็นต์กับเศษส่วนได้ ก็จะเป็นปัญหาในการหาคำตอบอีกลักษณะหนึ่งคือนักเรียนขาดทักษะการเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ ซึ่งจะต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับเศษส่วนที่เท่ากันที่มีตัวส่วนเป็น 100 ทำให้ไม่สามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้ กรณีเช่นนี้ในการจัดการเรียนการสอน ถ้านักเรียนมีความเข้าใจในการเปลี่ยนร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ดีกว่าครูอาจแนะนำเทคนิคการนำเปอร์เซ็นต์จากตัวเลือกมาทำให้อยู่ในรูปเศษส่วนแล้วเทียบเคียงกับคำตอบที่นักเรียนหาได้ ก็จะช่วยในการหาคำตอบได้เช่นกัน

จะเห็นได้ว่าสถานการณ์ของโจทย์ข้อนี้ ได้สะท้อนให้เห็นว่าการจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนจำเป็นต้องสอนให้นักเรียนรู้จักสังเกตและวิเคราะห์สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดในลักษณะต่าง ๆ ทั้งวิธีการใช้คำที่แตกต่างกันแต่มีความหมายเดียวกัน วิธีนำเสนอข้อมูลในรูปต่าง ๆ แทนการบอกเป็นจำนวนโดยตรง รวมถึงการเชื่อมโยงความรู้ที่มีกับการปรับมุมมองในการแก้ปัญหาให้หลากหลาย

เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์จากสถานการณ์โจทย์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่ต้องมีการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์มากกว่าหนึ่งเรื่องในการหาคำตอบ ครูผู้สอนควรหาโจทย์ในลักษณะดังกล่าวมาให้นักเรียนฝึกทำให้มากขึ้น ดังตัวอย่าง

สถานการณ์ มีลูกแก้วสีแดง สีเขียวและสีน้ำเงินอยู่ในถุง โดยอัตราส่วนระหว่างจำนวนลูกแก้วสีแดงต่อจำนวนลูกแก้วสีเขียวเป็น 2 : 3 และจำนวนลูกแก้ว สีน้ำเงินเป็นครึ่งหนึ่งของผลรวมจำนวนลูกแก้วสีแดงกับลูกแก้วสีเขียว

คำถามที่ 1 ถ้ามีลูกแก้วสีแดงอยู่ในถุง 20 ลูก และภาควิบลูกแก้วหนึ่งลูกจากถุงโดยมองไม่เห็นลูกแก้วในถุง จงหาความน่าจะเป็นที่ภาควิบได้ลูกแก้วสีแดง

แนวคิด ในถุงมีลูกแก้วสีแดง 20 ลูก อัตราส่วนระหว่างจำนวนลูกแก้วสีแดงต่อจำนวนลูกแก้วสีเขียวเป็น $2 : 3 = 20 : 30$

$$\text{ดังนั้น ในถุงมีลูกแก้วสีเขียว } 30 \text{ ลูก และมีลูกแก้วสีน้ำเงิน เท่ากับ } \frac{1}{2}(20 + 30) = 25 \text{ ลูก}$$

$$\text{ดังนั้น ในถุงมีลูกแก้วทั้งหมดเท่ากับ } 20 + 30 + 25 = 75 \text{ ลูก}$$

$$\text{ความน่าจะเป็นที่ภาควิบได้ลูกแก้วสีแดง เท่ากับ } \frac{20}{75} = \frac{4}{15}$$



คำถามที่ 2 ถ้าในถุงมีลูกแก้วสีแดงและสีเขียวรวมกัน 30 ลูก และภูมิหยิบลูกแก้วหนึ่งลูกจากถุง โดยมองไม่เห็นลูกแก้วในถุง จงหาความน่าจะเป็นที่ภูมิจะหยิบได้ลูกแก้วสีน้ำเงิน

แนวคิด ในถุงมีลูกแก้วสีแดงและสีเขียวรวมกัน 30 ลูก

มีลูกแก้วสีน้ำเงิน $\frac{1}{2} \times 30 = 15$ ลูก

ดังนั้น ในถุงมีลูกแก้วทั้งหมด $30 + 15 = 45$ ลูก

ความน่าจะเป็นที่ภูมิจะหยิบได้ลูกแก้วสีน้ำเงิน เท่ากับ $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

คำถามที่ 3 ถ้าในถุงมีลูกแก้วสีน้ำเงิน 20 ลูก และพลหยิบลูกแก้วหนึ่งลูกจากถุง โดยมองไม่เห็นลูกแก้วในถุง จงหาความน่าจะเป็นที่พลจะหยิบได้ลูกแก้วสีเขียว

แนวคิด ในถุงมีลูกแก้วสีน้ำเงิน 20 ลูก

ผลรวมของลูกแก้วสีแดงกับลูกแก้วสีเขียว เท่ากับ $2 \times 20 = 40$ ลูก

อัตราส่วนของจำนวนลูกแก้วสีแดงต่อจำนวนลูกแก้วสีเขียว เท่ากับ $2 : 3$

ดังนั้น มีลูกแก้วสีเขียวในถุง เท่ากับ $\frac{3}{5} \times 40 = 24$ ลูก

ในถุงมีลูกแก้วทั้งหมด $40 + 20 = 60$ ลูก

ความน่าจะเป็นที่พลจะหยิบได้ลูกแก้วสีเขียว เท่ากับ $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

แบบทดสอบวิทยาศาสตร์



ครูวิทยาศาสตร์ในโรงเรียนของเหม่ย หลัง ได้ทดสอบวิทยาศาสตร์โดยมีคำตอบถูก
ชุดละ 100 คะแนน เหม่ย หลัง ได้คะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบวิทยาศาสตร์ชุดแรก เท่ากับ 60
คะแนน ส่วนชุดที่ห้าเธอทำได้ 80 คะแนน

คำถามที่ 1 : ลูกอมสีต่างๆ

ค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบวิทยาศาสตร์ทั้งห้าชุดของ เหม่ย หลัง เท่ากับเท่าใด
ค่าเฉลี่ย:

คะแนนเต็ม

ตอบ 64

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

ประเทศ

% ตอบถูก

ญี่ปุ่น

62.62

เกาหลี

66.78

ฮ่องกง-จีน

75.49

มาเก๊า-จีน

69.39

ไทย

16.79



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์โจทย์ข้อนี้เป็นเรื่องการหาค่าเฉลี่ยของคะแนนจากแบบทดสอบห้าชุด โดยมีคะแนนของแบบทดสอบเป็นดังนี้

1. คะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบสี่ชุดแรก คือ 60 คะแนน
2. คะแนนของแบบทดสอบชุดที่ห้า คือ 80 คะแนน

ในการทำโจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องทราบว่า คำว่า “ค่าเฉลี่ย” เป็นคำที่ใช้พูดโดยทั่วไปหรือเป็นคำที่ใช้เรียกสั้น ๆ ของคำว่า “ค่าเฉลี่ยเลขคณิต”



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนต้องใช้ในการตอบคำถามคือ ความรู้ทางสถิติเกี่ยวกับการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต หรือใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเชื่อมโยงกับความรู้ทางสถิติเกี่ยวกับการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 ค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบวิทยาศาสตร์ทั้งห้าชุดของ เหม่ย หลิง เท่ากับเท่าใด

โจทย์ต้องการให้หาค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบวิทยาศาสตร์ทั้งห้าชุดของ เหม่ย หลิง เมื่อกำหนดคะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบสี่ชุดแรกเท่ากับ 60 คะแนนและคะแนนของแบบทดสอบชุดที่ห้าคือ 80 คะแนน

แนวคิด 1 เนื่องจากคะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบ 4 ชุดแรก เท่ากับ 60 คะแนน

ดังนั้น คะแนนรวมของแบบทดสอบ 4 ชุดแรก เท่ากับ 60×4

$$= 240 \text{ คะแนน}$$

และเนื่องจากคะแนนของแบบทดสอบชุดที่ห้า เท่ากับ 80 คะแนน

ดังนั้น คะแนนรวมของแบบทดสอบทั้ง 5 ชุด เท่ากับ $240 + 80$

$$= 320 \text{ คะแนน}$$

จะได้ คะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบทั้ง 5 ชุด เท่ากับ $\frac{320}{5}$

$$= 64 \text{ คะแนน}$$

นั่นคือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบวิทยาศาสตร์ทั้งห้าชุดของเหม่ย หลิง เท่ากับ 64 คะแนน



แนวคิด 2

ให้ x แทนผลบวกของคะแนนแบบทดสอบสี่ชุดแรก

ค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบสี่ชุดแรก เท่ากับ $\frac{x}{4}$

$$\text{จะได้ } 60 = \frac{x}{4}$$

$$x = 60 \times 4$$

จะได้ ผลบวกของคะแนนแบบทดสอบทั้งห้าชุด เท่ากับ $240 + 80$

$$= 320 \text{ คะแนน}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบทั้งห้าชุด เท่ากับ $\frac{320}{5}$

$$= 64 \text{ คะแนน}$$

นั่นคือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบวิทยาศาสตร์ทั้งห้าชุดของเหม่ย หลัง เท่ากับ 64 คะแนน



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

เป็นที่น่าสังเกตว่านักเรียนไทยส่วนใหญ่ตอบคำถามไม่ได้ นักเรียนไทยที่ตอบถูก มีเพียง 16.79 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ซึ่งต่ำมากเมื่อเทียบกับนักเรียน ญี่ปุ่น เกาหลี และจีน ที่ตอบถูกเกินกว่า 60 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบ ทั้งที่ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่พัฒนาโดย สสวท. เรื่องสถิติ ได้กล่าวถึงโจทย์ทำนองนี้ไว้ทั้งในตัวอย่างและแบบฝึกหัด เพียงแต่เนื้อหาดังกล่าวได้จัดให้เรียนในภาคเรียนที่ 2 ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนที่เข้าสอบจึงอาจจะยังไม่ได้เรียน และถ้าอาศัยเพียงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยที่เคยรู้มาแล้ว สถานการณ์โจทย์ข้อนี้ก็นับเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียนโดยทั่วไป เพราะนักเรียนจะต้องใช้ความสามารถในการนำความรู้ที่มีไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ที่ต่างไปจากโจทย์ที่นักเรียนเคยเรียน ซึ่งมักเป็นการหาค่าเฉลี่ยจากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้โดยตรง เมื่อโจทย์ต้องการหาค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบทั้งห้าชุด โดยไม่ได้ให้คะแนนของแบบทดสอบทั้งห้าชุดโดยตรง แต่ให้คะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบสี่ชุดแรกเท่ากับ 60 คะแนน และคะแนนของแบบทดสอบชุดที่ห้าคือ 80 คะแนน นักเรียนจึงหาคำตอบไม่ได้ แสดงว่านักเรียนขาดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับสิ่งที่ต้องการใช้ในการหาคำตอบ คือไม่สามารถเชื่อมโยงได้ว่าการหาผลบวกของคะแนนแบบทดสอบทั้งห้าชุด จะต้องอาศัยการหาผลบวกของคะแนนแบบทดสอบสี่ชุดแรกรวมกับคะแนนของแบบทดสอบชุดที่ห้า และผลบวกของคะแนนแบบทดสอบสี่ชุดแรกหาได้จากค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบสี่ชุดแรก



เพื่อให้ นักเรียนมีพื้นฐานในการนำความรู้เรื่องการหาค่าเฉลี่ยไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่หลากหลาย ครูผู้สอนควรฝึกให้นักเรียนมีความเข้าใจสูตรการหาค่าเฉลี่ยและสามารถนำสูตรไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = \frac{\text{ผลบวกของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$$

1. ให้หาค่าเฉลี่ยเมื่อกำหนดข้อมูลให้
2. ให้หาผลบวกของข้อมูลทั้งหมด เมื่อกำหนดค่าเฉลี่ยและจำนวนข้อมูล
3. ให้หาจำนวนข้อมูล เมื่อกำหนดค่าเฉลี่ยและผลบวกของข้อมูลทั้งหมด

นอกจากการฝึกพื้นฐานในการใช้สูตรแล้ว ครูผู้สอนควรฝึกให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ในการนำสูตรไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ซับซ้อนขึ้น เพื่อเป็นการฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการแก้ปัญหา การสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ รวมถึงการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง ในการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์นักเรียน 12 คน คิดคะแนนเฉลี่ยได้ 25 คะแนน ต่อมาตรวจพบว่าการรวมคะแนนผิดไป 2 คน คือ นับคะแนนเกินไป 8 คะแนนหนึ่งคน และนับคะแนนขาดไป 2 คะแนนหนึ่งคน จงหาค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบที่ถูกต้อง

แนวคิด เนื่องจาก $\text{ค่าเฉลี่ย} = \frac{\text{ผลบวกของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$

ให้ x แทนผลบวกของคะแนนสอบของนักเรียน 12 คน

$$\text{จะได้ } 25 = \frac{x}{12}$$

$$x = 25 \times 12 = 300$$

เนื่องจาก มีการรวมคะแนนผิดไป 2 คน คือ

นับเกินไป 8 คะแนน กับนับขาดไป 2 คะแนน

$$\text{จะได้ ค่า } x \text{ ที่ถูกต้อง เท่ากับ } 300 - 8 + 2 = 294$$

$$\text{ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบที่ถูกต้อง เท่ากับ } \frac{294}{12} = 24.5 \text{ คะแนน}$$



ในการแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้ ครูผู้สอนอาจให้นักเรียนใช้วิธีที่แตกต่างจากแนวคิดที่ให้ไว้ การฝึกให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลายในสถานการณ์ต่าง ๆ ด้วยตนเอง จะทำให้นักเรียนมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่แตกต่างจากที่เคยเรียนได้

ในการจัดการเรียนการสอนเรื่อง ค่าเฉลี่ยเลขคณิต นอกจากการหาค่าเฉลี่ยจากข้อมูลที่กำหนดให้แล้ว ครูควรให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความหมายของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ตลอดจนความคิดรวบยอดในการตีความและการนำไปใช้ ดังข้อสอบ PISA ปี 2006 ต่อไปนี้

ความสูง

ห้องเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียนหญิง 25 คน ความสูงเฉลี่ยของนักเรียนหญิงกลุ่มนี้เป็น 130 เซนติเมตร

คำถามที่ 1 จงอธิบายวิธีการหาความสูงเฉลี่ย

.....
แนวคำตอบ คือ คำอธิบายประกอบด้วยผลรวมของความสูงของนักเรียนแต่ละคน แล้วหารด้วย 25

คำถามที่ 2 จงเขียนวงกลมล้อมรอบคำว่า “จริง” หรือ “เท็จ” ในแต่ละประโยคต่อไปนี้

ประโยค	จริง หรือ เท็จ
ถ้านักเรียนหญิงคนหนึ่งในห้องสูง 132 เซนติเมตร ต้องมีนักเรียนหญิงอีกคนหนึ่งสูง 128 เซนติเมตร	จริง / เท็จ
นักเรียนหญิงส่วนใหญ่ต้องมีความสูง 130 เซนติเมตร	จริง / เท็จ
ถ้าจัดลำดับเด็กหญิงจากเตี้ยที่สุดไปสูงที่สุด นักเรียนคนที่มีลำดับตรงกลาง ต้องมีความสูง 130 เซนติเมตร	จริง / เท็จ
ครึ่งหนึ่งของนักเรียนหญิงในห้องต้องเตี้ยกว่า 130 เซนติเมตร และอีกครึ่งหนึ่ง ต้องสูงกว่า 130 เซนติเมตร	จริง / เท็จ

คำตอบ คือ เป็นเท็จทุกประโยค

คำถามที่ 3 มีการพบข้อผิดพลาดจากการวัดความสูงของนักเรียนคนหนึ่ง ซึ่งควรจะเป็น 120 เซนติเมตร ไม่ใช่ 145 เซนติเมตร ความสูงเฉลี่ยของนักเรียนหญิงที่ถูกต้องควรเป็นเท่าใด

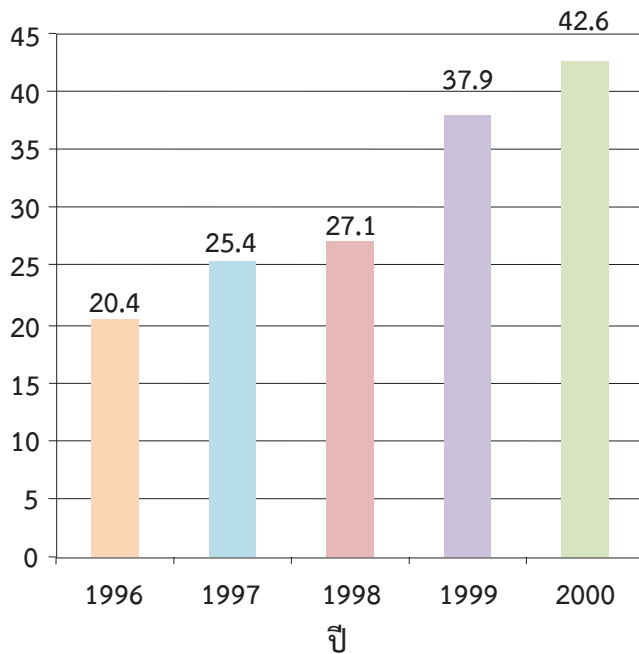
1. 126 เซนติเมตร
2. 127 เซนติเมตร
3. 128 เซนติเมตร
4. 129 เซนติเมตร
5. 144 เซนติเมตร

คำตอบ คือ ข้อ 4. 129 เซนติเมตร

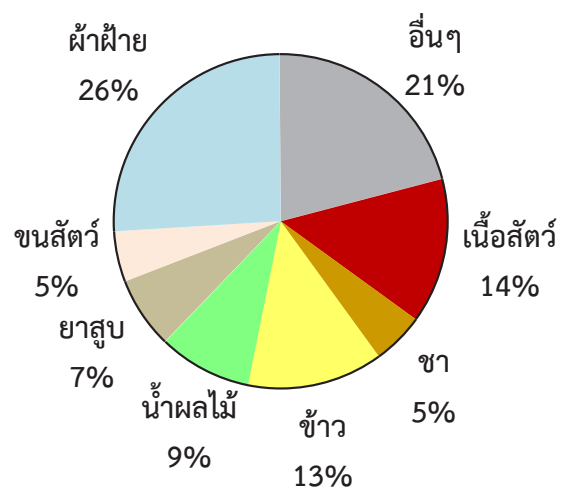
การส่งออก

กราฟต่อไปนี้แสดงข้อมูลการส่งออกของประเทศเซนต์แลนด์ ซึ่งเป็นประเทศที่ใช้เงินสกุลเซตเป็นเงินตราของประเทศ

มูลค่ารวมของการส่งออกรายปีของประเทศ
เซนต์แลนด์ในหน่วยล้านเซต ระหว่างปี 1996 - 2000



การจำแนกชนิดของการส่งออกของ
เซนต์แลนด์ ในปี 2000



คำถามที่ 1 : การส่งออก

ในปี 1998 มูลค่ารวมการส่งออกของประเทศเซนต์แลนด์เป็นเงินเท่าไร (หน่วยเป็นล้านเซต)

คำตอบ :

คะแนนเต็ม

27.1 ล้านเซต หรือ 27 100 000 เซต หรือ 27.1 (ไม่ต้องใส่หน่วย) และยอมรับคำตอบที่พิเศษแล้ว เป็น 27

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ในเชิงการศึกษา

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ**% ตอบถูก**

ญี่ปุ่น 64.65

เกาหลี 64.65

ฮ่องกง-จีน 78.27

มาเก๊า-จีน 82.43

ไทย 77.84

คำถามที่ 2 : การส่งออก

มูลค่ารวมการส่งออกน้ำผลไม้จากประเทศเซนต์แลนดในปี 2000 เป็นเท่าไร

1. 1.8 ล้านเซต

2. 2.3 ล้านเซต

3. 2.4 ล้านเซต

4. 3.4 ล้านเซต

5. 3.8 ล้านเซต

คะแนนเต็ม

ตอบ 5. 3.8 ล้านเซต

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : สถิติ

สถานการณ์ : ชุมชนในท้องถิ่น

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : เลือกคำตอบ

ประเทศ**% ตอบถูก**

ญี่ปุ่น 54.93

เกาหลี 54.47

ฮ่องกง-จีน 68.33

มาเก๊า-จีน 62.98

ไทย 31.48



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

ในสถานการณ์โจทย์ได้นำเสนอข้อมูลการส่งออกของประเทศเซตแลนด์ด้วยแผนภูมิแท่งและแผนภูมิรูปวงกลม ดังนี้

1. แผนภูมิแท่งแสดงมูลค่ารวมการส่งออกรายปี ในช่วงปี ค.ศ. 1996 ถึงปี ค.ศ. 2000
2. แผนภูมิรูปวงกลมแสดงการจำแนกชนิดของการส่งออกในปี ค.ศ. 2000

โจทย์มีคำถาม 2 ข้อ คำถามข้อแรกเป็นคำถามที่สามารถหาคำตอบได้โดยตรงจากการอ่านแผนภูมิแท่ง ส่วนคำถามที่สองต้องใช้ในการเชื่อมโยงข้อมูลจากแผนภูมิแท่งและแผนภูมิรูปวงกลมมาคำนวณหาคำตอบ



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องใช้ความรู้พื้นฐานทางสถิติเรื่องข้อมูลและการนำเสนอข้อมูลในรูปแผนภูมิแท่งและแผนภูมิรูปวงกลม การอ่านและการตีความหมาย รวมถึงความรู้เรื่องเปอร์เซ็นต์หรือร้อยละในการคำนวณหาจำนวนหรือปริมาณจริงของข้อมูลที่น่าเสนอไว้เป็นเปอร์เซ็นต์ในแผนภูมิรูปวงกลม



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 โจทย์ถามว่า ในปี ค.ศ. 1998 มูลค่ารวมการส่งออกของประเทศเซตแลนด์เป็นเงินเท่าไร

แนวคิด คำตอบของคำถามนี้หาได้จากการอ่านแผนภูมิแท่ง ซึ่งนำเสนอข้อมูล มูลค่ารวมของการส่งออกรายปีของประเทศเซตแลนด์ในหน่วยล้านเซต ในช่วงปี ค.ศ. 1996 ถึงปี ค.ศ. 2000 จากแผนภูมิจะเห็นว่าในปี ค.ศ. 1998 มีมูลค่ารวมการส่งออกเท่ากับ 27.1 ล้านเซต (หน่วยล้านเซต อ่านได้จากหัวตาราง)



คำถามที่ 2 โจทย์ถามว่า มูลค่ารวมการส่งออกน้ำผลไม้จากประเทศเซตแลนด์ ในปี ค.ศ. 2000 เป็นเท่าไร

แนวคิด คำตอบของคำถามนี้ต้องใช้ข้อมูลที่อ่านจากทั้งแผนภูมิแท่งและแผนภูมิรูปวงกลม โดยในการหาคำตอบจะต้องทราบข้อมูล 2 อย่าง คือ



1. มูลค่ารวมการส่งออกในปี ค.ศ. 2000 ซึ่งแสดงไว้ในแผนภูมิแท่งคือ 42.6 ล้านเซต
2. เปอร์เซ็นต์การส่งออกน้ำผลไม้ในปี ค.ศ. 2000 ซึ่งแสดงไว้ในแผนภูมิรูปวงกลม คือ 9%

เนื่องจากข้อมูลที่แสดงไว้ในแผนภูมิรูปวงกลมเป็นการจำแนกชนิดของการส่งออกของเซตแลนด์ในปี ค.ศ. 2000 เมื่อมีเปอร์เซ็นต์การส่งออกน้ำผลไม้ 9% จึงหมายความว่า มูลค่ารวมการส่งออกน้ำผลไม้ ในปี ค.ศ. 2000 เท่ากับ $\frac{9}{100}$ ของมูลค่ารวมการส่งออกของประเทศเซตแลนด์ในปี ค.ศ. 2000

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ มูลค่ารวมการส่งออกน้ำผลไม้ในปี ค.ศ. 2000 เท่ากับ } & \frac{9}{100} \times 42.6 \\ & = 3.834 \text{ ล้านเซต} \\ & \text{หรือประมาณ 3.8 ล้านเซต}\end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบ คือ ข้อ 5



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ในแง่ของเปอร์เซ็นต์ นักเรียนไทยตอบคำถามที่ 1 ได้ถูกต้องมากกว่านักเรียนญี่ปุ่น และนักเรียนเกาหลี คือ นักเรียนไทยตอบคำถามที่ 1 ได้ถูกต้องถึง 77.84 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ในขณะที่นักเรียนญี่ปุ่นและนักเรียนเกาหลีตอบคำถามที่ 1 ได้ถูกต้องเท่านั้นคือ 64.65 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบ แต่คำถามข้อที่ 2 นักเรียนไทยตอบคำถามได้ถูกต้องเพียง 31.48 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ต่ำกว่านักเรียนญี่ปุ่นและนักเรียนเกาหลีที่ตอบได้ถูกต้อง 54.93 และ 54.47 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบตามลำดับ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะคำถามที่ 1 สามารถหาคำตอบได้โดยตรงจากการอ่านแผนภูมิแท่งซึ่งนักเรียนได้ฝึกทำโจทย์ลักษณะนี้ค่อนข้างมาก ส่วนคำถามที่ 2 การหาคำตอบต้องอาศัยการเชื่อมโยงข้อมูลจากแผนภูมิแท่งและแผนภูมิรูปวงกลมแล้วนำมาคิดคำนวณ แสดงให้เห็นว่านักเรียนไทยขาดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหาที่ต้องเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์และข้อมูลที่ได้รับจากการสื่อความหมาย นักเรียนมักคุ้นเคยกับการใช้ความรู้ที่ละเอียดเรื่องในการแก้ปัญหาโดยตรงไปตรงมา เมื่อพบสถานการณ์ที่ต้องเชื่อมโยงความรู้มากกว่าหนึ่งเรื่องในการแก้ปัญหานักเรียนส่วนใหญ่จึงทำไม่ได้



2. รูปแบบการกำหนดสถานการณ์โจทย์ข้อนี้เป็นตัวอย่างที่ดีสำหรับการเชื่อมโยงข้อมูลระหว่างแผนภูมิแท่งกับแผนภูมิรูปวงกลม เพราะในการตอบคำถามที่ 2 ซึ่งถามว่ามูลค่ารวมการส่งออกน้ำผลไม้จากประเทศเซตแลนด์ในปี ค.ศ. 2000 เป็นเท่าไร ในการตอบคำถามดังกล่าวต้องใช้ข้อมูลทั้งจากแผนภูมิรูปวงกลมและแผนภูมิแท่ง ถ้านักเรียนไม่รู้จักเชื่อมโยงข้อมูลก็จะไม่สามารถหาคำตอบได้ นอกจากนี้นักเรียนจะต้องสามารถแปลความหมายของข้อมูลจากแผนภูมิรูปวงกลมที่แสดงไว้เป็นเปอร์เซ็นต์ได้ด้วยจึงจะสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้ นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามที่ 2 ไม่ได้จึงควรมีการฝึกให้นักเรียนได้มีประสบการณ์การแก้ปัญหาโจทย์ในลักษณะดังกล่าวให้มากขึ้นด้วย

เพื่อฝึกทักษะการแก้ปัญหาให้หลากหลาย ครูผู้สอนอาจตั้งคำถามเพิ่มเติมในสถานการณ์โจทย์ข้างต้นให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ในการเชื่อมโยงความรู้เพื่อแก้ปัญหา ซึ่งมีหลายคำถามที่ครูสามารถนำมาให้นักเรียนวิเคราะห์ในการหามูลค่ารวมการส่งออกสินค้าชนิดต่าง ๆ หรือการเปรียบเทียบมูลค่ารวมการส่งออกสินค้าในปีต่าง ๆ โดยกำหนดเงื่อนไขหรือข้อมูลเพิ่มเติมในคำถาม ดังตัวอย่างคำถาม เช่น



คำถาม จากสถานการณ์โจทย์ข้างต้น ถ้าเปอร์เซ็นต์การส่งออกสินค้าชนิดต่าง ๆ ของประเทศเซตแลนด์ในปี 1999 เหมือนกับปี 2000 จงหามูลค่ารวมการส่งออกข้าวจากประเทศเซตแลนด์ในปี 1999 เป็นเท่าใด แตกต่างจากปี 2000 หรือไม่ เพราะเหตุใด

แนวคิด มูลค่ารวมการส่งออกข้าวจากประเทศเซตแลนด์ในปี 1999 เท่ากับ $\frac{13}{100} \times 37.9 = 4.927$ ล้านเซต ซึ่งแตกต่างจากปี 2000 เพราะมูลค่ารวมการส่งออกในปี 1999 และปี 2000 แตกต่างกัน

ขยะ



ในการทำการบ้านเรื่องสิ่งแวดล้อม นักเรียนได้รวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาการสลายตัวของขยะชนิดต่าง ๆ ที่ประชาชนทั้งได้ดังนี้

ชนิดของขยะ	ระยะเวลาการสลายตัว
เปลือกกล้วย	1-3 ปี
เปลือกส้ม	1-3 ปี
กล่องกระดาษแข็ง	0.5 ปี
หมากฝรั่ง	20-25 ปี
หนังสือพิมพ์	2-3 วัน
ถ้วยพลาสติก	มากกว่า 100 ปี

คำถามที่ 1: ขยะ

นักเรียนคนหนึ่งคิดที่จะแสดงข้อมูลเหล่านี้เป็นกราฟแท่ง
จงให้เหตุผลมาหนึ่งข้อว่า ทำไมกราฟแท่งจึงไม่เหมาะสมในการแสดงข้อมูลเหล่านี้

.....

คะแนนเต็ม

ให้เหตุผลที่ชัดเจนเกี่ยวกับความแตกต่างของข้อมูลที่มีมากเกินไป เช่น

- ความสูงของแท่งกราฟจะต่างกันมากเกินไป
- ถ้าทำกราฟแท่ง ยาว 10 เซนติเมตร สำหรับถ้วยพลาสติก แท่งที่แสดงกล่องกระดาษแข็งจะยาว 0.05 เซนติเมตร

หรือ เน้นเหตุผลของการผันแปรของขยะบางชนิด เช่น

- ไม่อาจกำหนดความยาวของกราฟแท่งที่แสดงถึง “พลาสติก” ได้
- ไม่อาจทำกราฟแท่งหนึ่งสำหรับ 1 – 3 ปี หรือแท่งหนึ่งสำหรับ 20 – 25 ปี

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	59.90
เกาหลี	74.86
ฮ่องกง-จีน	68.14
มาเก๊า-จีน	65.02
ไทย	34.96

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ เช่น

- เพราะว่ามันจะใช้งานไม่ได้
- แผนภูมิรูปภาพดีกว่า
- ไม่อาจพิสูจน์ความถูกต้องของข้อมูลได้
- เพราะข้อมูลในตารางเป็นการประมาณการ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : สถิติ

สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์

สมรรถนะ : การสะท้อนการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ในโจทย์ข้อนี้ ได้กล่าวถึงข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาการสลายตัวของขยะชนิดต่าง ๆ ที่มีการนำเสนอเป็นตาราง ซึ่งข้อมูลระยะเวลาการสลายตัวของขยะส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นช่วง จากนั้นโจทย์ถามความคิดเห็นนักเรียนว่า ข้อมูลที่กำหนดมาให้สามารถนำเสนอในรูปแบบกราฟแท่งได้หรือไม่

สถานการณ์ในโจทย์ข้อนี้ต้องการทดสอบว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบกราฟแท่งมากน้อยเพียงใด โดยสามารถพิจารณาได้ว่าข้อมูลที่เหมาะสมที่สามารถนำเสนอในรูปแบบกราฟแท่งได้นั้น จะต้องมีความสำคัญหรือลักษณะเด่นอย่างไรบ้าง และข้อมูลที่โจทย์ให้มา มีลักษณะสอดคล้องหรือไม่อย่างไร



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ

1. ความรู้เกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบกราฟแท่ง จากคำถามที่ 1 ให้แสดงเหตุผลว่า จากข้อมูลในตารางที่โจทย์กำหนด ทำไมจึงไม่เหมาะสมที่จะนำเสนอในรูปแบบ กราฟแท่ง นักเรียนจึงต้องมีความรู้ว่าจะนำเสนอในรูปแบบกราฟแท่งควรจะเป็นอย่างไร และการนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟแท่งมีลักษณะสำคัญหรือลักษณะเด่นอย่างไรบ้าง

2. การตีความข้อมูลจากตารางที่กำหนดให้ ในที่นี้เป็นตาราง 2 สดมภ์ สดมภ์แรกเป็นชนิดของขยะ ซึ่งเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ส่วนสดมภ์ที่สองเป็นข้อมูลเชิงปริมาณ แต่จะเห็นว่าข้อมูลในสดมภ์ที่สอง ส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นช่วง เวลาที่ใช้มีหน่วยต่างกัน และแสดงระยะเวลาที่มีความแตกต่างกันมาก นักเรียนจะต้องมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้เหล่านี้กับลักษณะสำคัญของกราฟแท่งว่า มีสิ่งใดบ้างที่ขัดแย้งกันอยู่ อันเป็นเหตุให้ไม่เหมาะสมที่จะนำเสนอโดยใช้กราฟแท่ง

นักเรียนส่วนใหญ่จะได้รับการฝึกทักษะในการอ่านข้อมูลจากการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่าง ๆ แต่ขาดการเน้นย้ำในเรื่องลักษณะสำคัญหรือลักษณะเด่นของการนำเสนอข้อมูลในแต่ละแบบนั้น

3. ความสามารถในการนำความรู้เกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลมาประยุกต์ใช้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งความสามารถในการวิเคราะห์ถึงความเหมาะสมและประโยชน์ที่ได้รับจากการนำเสนอข้อมูลแต่ละรูปแบบ





แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 จงให้เหตุผลมาหนึ่งข้อว่า ทำไมกราฟแท่งจึงไม่เหมาะในการแสดงข้อมูลเหล่านี้

แนวคิด

1. การนำเสนอข้อมูลในรูปกราฟแท่ง ถ้าข้อมูลเป็นข้อมูลเชิงปริมาณจะต้องมีการระบุเป็นค่าเดียว สำหรับโจทย์ข้อนี้ ข้อมูลในแกน X แทนชนิดของขยะ ซึ่งเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ แต่แกน Y (ความสูงของกราฟแท่ง) แทนระยะเวลาการสลายตัวของขยะชนิดต่าง ๆ ซึ่งเป็นข้อมูลเชิงปริมาณ ดังนั้นจะต้องมีลักษณะเป็นค่าค่าเดียว แต่จากตารางที่โจทย์กำหนด ข้อมูลมีลักษณะเป็นช่วง เช่น 1-3 ปี และมากกว่า 100 ปี จึงทำให้ไม่สามารถนำมาสร้างเป็นกราฟแท่งได้ เนื่องจากไม่สามารถหาความสูงของกราฟได้

2. นอกจากนี้ข้อมูลที่เหมาะสมในการนำเสนอด้วยกราฟแท่งจะต้องไม่แตกต่างกันมากนัก และความสูงของกราฟแท่งจะต้องใช้หน่วยเดียวกัน ระยะเวลาการสลายตัวของขยะชนิดต่างๆ ที่กำหนดให้ เมื่อปรับให้มีหน่วยเดียวกันจะแตกต่างกันค่อนข้างมาก เช่น ถ้วยพลาสติกมีระยะเวลาการสลายตัวมากกว่า 100 ปี หนังสือพิมพ์มีระยะเวลาการสลายตัวเพียง 2 - 3 วัน เมื่อนำมาสร้างเป็นกราฟแท่ง ความสูงของกราฟแท่งจะแตกต่างกันมาก ทำให้เกิดปัญหาในการเขียนแผนภูมิแท่งที่ให้ข้อมูลตามความเป็นจริง

ตัวอย่างคำตอบ

1. ถ้าพิจารณาเฉพาะความสูงของแท่งกราฟที่แทนระยะเวลาการสลายตัวของขยะ จะพบว่า ความสูงของกราฟจะแตกต่างกันมากเกินไป เช่น การสลายตัวของถ้วยพลาสติกใช้เวลาเกิน 100 ปี ขณะที่การสลายตัวของหนังสือพิมพ์เพียง 2 - 3 วัน เท่านั้น

2. ถ้าพิจารณาการเขียนกราฟแต่ละแท่ง จะพบว่าไม่สามารถจะกำหนดหน่วยความสูงของแท่งที่แสดงระยะเวลาการสลายตัวของขยะได้ เช่น ช่วงเวลาสลายตัว 1 - 3 ปี หรือช่วงเวลาสลายตัว 20 - 25 ปี หรือช่วงเวลาสลายตัวมากกว่า 100 กว่าปี



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. สิ่งสำคัญในการเรียนเรื่องการนำเสนอข้อมูล คือ การอ่าน การตีความหมายข้อมูล และการนำเสนอข้อมูลในลักษณะต่าง ๆ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นักเรียนมักจะคุ้นเคยกับการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบของตารางและกราฟลักษณะต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน จากสื่อต่าง ๆ เช่น โทรทัศน์ หนังสือพิมพ์ และป้ายโฆษณา นักเรียนควรมีทักษะในการตีความหมาย เพื่อรู้เท่าทันข้อมูลที่สื่อต่าง ๆ นำเสนอ นอกจากนี้ นักเรียนควรรู้จักในการเลือกรูปแบบการนำเสนอข้อมูลที่เหมาะสม ทราบถึงเงื่อนไขหรือข้อจำกัดของการนำเสนอข้อมูลในแต่ละรูปแบบ รวมถึงขั้นตอนหรือวิธีการในการนำเสนอข้อมูล ก็จะทำให้การรับรู้ข่าวสารจากการนำเสนอข้อมูลได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. นักเรียนอาจจะเกิดความสับสนเกี่ยวกับข้อมูลในตารางที่โจทย์กำหนดกับตารางการแจกแจงความถี่ เนื่องจากในบางครั้งข้อมูลที่ให้อาจจะเป็นช่วงกับความถี่ ซึ่งสามารถนำเสนอข้อมูลในรูปแบบของกราฟแท่งได้ ครูควรจะเน้นให้นักเรียนเข้าใจถึงข้อมูลที่ใช้การสร้างกราฟแท่งที่เหมาะสม

3. การที่มีนักเรียนไทยประมาณ 35 เปอร์เซนต์ของนักเรียนไทยที่เข้าสอบตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้อง อาจเป็นเพราะว่านักเรียนไม่คุ้นเคยกับลักษณะโจทย์ของสถานการณ์ที่กำหนด และอาจจะไม่คุ้นกับโจทย์ที่มีลักษณะที่มีการเชื่อมโยงเพื่อหาเหตุผลที่สอดคล้องกันหรือขัดแย้งกัน ในการเรียนการสอนครูควรให้นักเรียนพิจารณาสมบัติของข้อมูลที่เหมาะสมกับการนำเสนอข้อมูลแบบต่าง ๆ จากข้อมูลที่กำหนดให้ และควรให้นักเรียนสรุปลักษณะเด่นและลักษณะด้อยของการนำเสนอข้อมูลในแต่ละรูปแบบ ตลอดจนฝึกให้นักเรียนทำโจทย์ชนิดปลายเปิดให้มากขึ้น

นอกจากนี้ โจทย์ข้อนี้ได้สะท้อนให้เห็นว่ายังมีสถานการณ์ต่าง ๆ อีกมากมายที่สามารถนำมาให้นักเรียนพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลที่ปรากฏตามสื่อต่าง ๆ หรือการสำรวจความคิดเห็นที่นำเสนอโดยโพลต่าง ๆ ครูสามารถนำสิ่งเหล่านี้มาอภิปรายในชั้นเรียนในช่วงเวลาสัปดาห์ถึงความสมเหตุสมผลหรือความเหมาะสมหรือไม่อย่างไร นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นวัยที่สามารถเรียนรู้และมีส่วนร่วมในเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเป็นประจำวันในสังคม เพราะนอกจากทางด้านวิชาการแล้วทางด้านความรับผิดชอบต่อสังคมที่อยู่ร่วมกันเป็นส่วนรวมด้วย การเรียนรู้จากสิ่งเหล่านี้เป็นการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปด้วยอย่างอัตโนมัติ



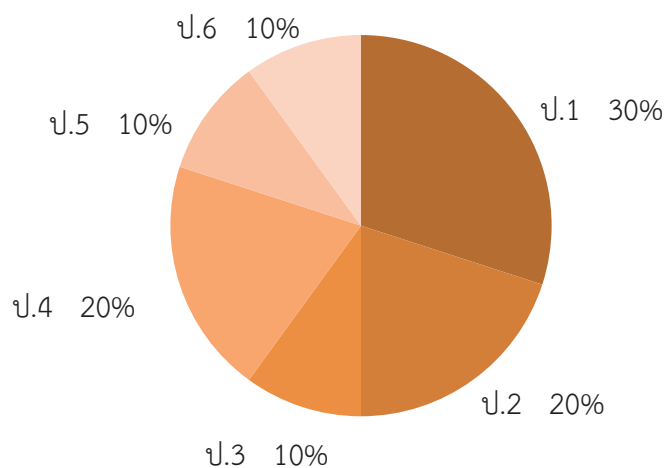


ในการจัดการเรียนการสอนเรื่องสถิติ ครูควรนำข้อมูลข่าวสารที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน มาให้นักเรียนได้อภิปรายอย่างกว้างขวางในหลาย ๆ แง่มุม เพราะการที่นักเรียนมีความรู้ในหลักการ แต่ไม่มีโอกาสนำหลักการเหล่านั้นมาวิเคราะห์ให้เห็นแง่มุมต่าง ๆ ทำให้นักเรียนขาดประสบการณ์และไม่มีความมั่นใจในการนำสถิติที่เรียนมาไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างโจทย์เกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลและการตีความหมายจากการนำเสนอข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนจะต้องนำความรู้เรื่องร้อยละมาเชื่อมโยงในการตอบคำถาม

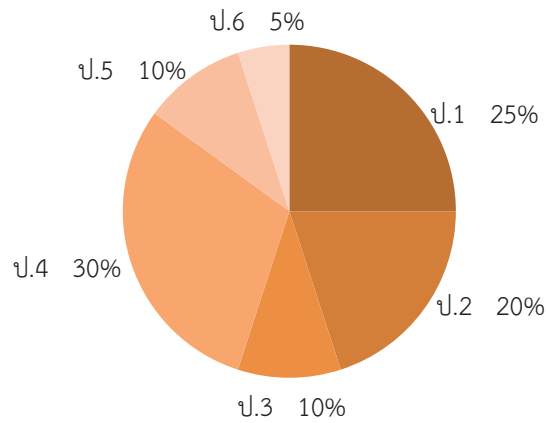
ตัวอย่าง ห้องพยาบาลของโรงเรียนระดับประถมศึกษาแห่งหนึ่ง ได้เก็บสถิติจำนวนนักเรียนที่เป็นไข้หวัดและลาป่วยเป็นรายเดือน และนำเสนอข้อมูลของนักเรียนที่ป่วยในแต่ละเดือนในรูปแบบแผนภูมิวงกลม สำหรับแผนภูมิวงกลมของเดือนกรกฎาคม และเดือนสิงหาคม พ.ศ. 2557 เป็นดังนี้

แผนภูมิวงกลมของเดือนกรกฎาคม





แผนภูมิรูปวงกลมของเดือนสิงหาคม



คำถามที่ 1 ในเดือนกรกฎาคม นักเรียนชั้นใดมีนักเรียนป่วยมากที่สุด
ตอบ นักเรียนชั้น ป.1

คำถามที่ 2 จำนวนนักเรียนชั้น ป.1 ที่ป่วยในเดือนกรกฎาคม เท่ากับจำนวนนักเรียนชั้น ป.4 ที่ป่วยในเดือนสิงหาคม หรือไม่ เพราะเหตุใด

แนวคิด ยังไม่สรุปเนื่องจาก อาจเป็นไปได้กรณีใด กรณีหนึ่งต่อไปนี้

กรณี 1 : เท่ากัน ถ้าจำนวนนักเรียนที่ป่วยทั้งหมดในเดือนกรกฎาคม และเดือนสิงหาคม มีจำนวนเท่ากัน

กรณี 2 : ไม่เท่ากัน ถ้าจำนวนนักเรียนที่ป่วยทั้งหมดในเดือนกรกฎาคม และเดือนสิงหาคมมีจำนวน ไม่เท่ากัน เช่น

ถ้าเดือนกรกฎาคมมีนักเรียนป่วย 10 คน และเดือนสิงหาคม มีนักเรียนป่วย 20 คน จะได้ จำนวนนักเรียนชั้น ป.1 ป่วย เท่ากับ $\frac{30}{100} \times 10 = 3$ คน

จำนวนนักเรียนชั้น ป.4 ป่วย เท่ากับ $\frac{30}{100} \times 20 = 6$ คน

จะเห็นว่า ถ้าจำนวนนักเรียนที่ป่วยในเดือนกรกฎาคม และเดือนสิงหาคมมีจำนวนเท่ากัน จึงจะสามารถนำจำนวนเปอร์เซ็นต์มาเปรียบเทียบกันได้

คำถามที่ 3 ในช่วงเดือนกรกฎาคม และเดือนสิงหาคม นักเรียนชั้นใดป่วยเป็นจำนวนมากที่สุด เพราะเหตุใด

แนวคิด ตอบไม่ได้ว่านักเรียนชั้นใดป่วยเป็นจำนวนมากที่สุด เพราะไม่สามารถนำจำนวนเปอร์เซ็นต์ของทั้งสองเดือนมารวมกันแล้วเปรียบเทียบกันได้ ทั้งนี้เป็นเพราะว่าแต่ละหนึ่งเปอร์เซ็นต์ในแต่ละเดือน อาจแทนจำนวนนักเรียนที่ต่างกัน ทั้งที่ถ้าดูผิว ๆ นักเรียนอาจจะคิดว่านักเรียนชั้น ป.1 มีจำนวนนักเรียนป่วยมากที่สุด เพราะมีจำนวนเปอร์เซ็นต์ที่รวมกันมากกว่าชั้นอื่น ๆ คือ 55% พิจารณาข้อมูลดังนี้



ถ้าเดือนกรกฎาคมมีผู้ป่วยทั้งหมด 100 คน เดือนสิงหาคมมีผู้ป่วยทั้งหมด 360 คน

เดือน	ป.1	ป.2
กรกฎาคม	30% = 30 คน	20% = 20 คน
สิงหาคม	25% = 90 คน	30% = 108 คน
รวม	55% = 120 คน	50% = 128 คน

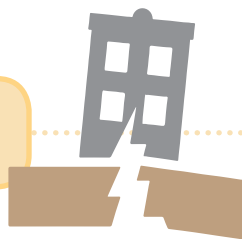
จะเป็นกรณีหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่าผลรวม 55% อาจไม่ใช่ค่าที่มากที่สุดก็ได้

จากตัวอย่างสถานการณ์ดังกล่าว ครูสามารถนำประเด็นต่าง ๆ มาอภิปรายต่อ เช่น มีกรณีใดบ้างที่สามารถบอกได้ว่านักเรียนชั้นใดป่วยเป็นจำนวนสูงสุด หรือต่ำสุด ในช่วงสองเดือนโดยพิจารณาจากแผนภูมิรูปวงกลมที่กำหนดให้ ซึ่งครูอาจให้ข้อสังเกตว่า

ถ้ามีกรณีที่ในเดือนกรกฎาคม นักเรียนชั้นที่ป่วยมีจำนวนเปอร์เซ็นต์ป่วยสูงสุด หรือต่ำสุด และขณะเดียวกันในเดือนสิงหาคม นักเรียนชั้นเดียวกันนั้นมีจำนวนเปอร์เซ็นต์ที่ป่วยสูงสุด หรือต่ำสุดตามไปด้วย ก็สามารถบอกได้ว่านักเรียนชั้นนั้นมีจำนวนที่ป่วยสูงสุดหรือต่ำสุด เช่น จากโจทย์ที่กำหนด จะเห็นว่าในเดือนกรกฎาคมนักเรียนชั้น ป.6 ป่วยคิดเป็น 10% และไม่มีนักเรียนชั้นอื่นที่ป่วยต่ำกว่า 10% ในขณะเดียวกันในเดือนสิงหาคม นักเรียนชั้น ป.6 ป่วยคิดเป็น 5% ซึ่งเป็นจำนวนเปอร์เซ็นต์ต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับชั้นอื่น ๆ ในกรณีนี้สามารถสรุปได้ว่า ในช่วงเดือนกรกฎาคมและเดือนสิงหาคม นักเรียนชั้น ป.6 มีจำนวนนักเรียนที่ป่วยน้อยที่สุดได้

เหตุผล เป็นเพราะว่า ในการที่มีนักเรียนชั้น ป.6 ป่วยเป็นจำนวนเปอร์เซ็นต์น้อยที่สุดในเดือนกรกฎาคม ก็แสดงว่ามีจำนวนนักเรียน ป.6 น้อยที่สุดที่ป่วยเมื่อเทียบกับชั้นอื่น ๆ ในทำนองเดียวกันในเดือนสิงหาคมนักเรียน ป.6 ป่วยเป็นจำนวนเปอร์เซ็นต์น้อยที่สุดเมื่อเทียบกับชั้นอื่น ๆ ก็แสดงว่ามีนักเรียนชั้น ป.6 เป็นจำนวนน้อยที่สุดที่ป่วยเมื่อเทียบกับชั้นอื่น ๆ จึงสามารถสรุปได้ว่าเมื่อรวมจำนวนที่น้อยที่สุดสองจำนวนเข้าด้วยกันย่อมน้อยกว่าผลรวมของจำนวนนักเรียนที่ป่วยในแต่ละชั้นอื่น ๆ ด้วย

แผ่นดินไหว



รายการสารคดีออกอากาศเรื่องเกี่ยวกับแผ่นดินไหว และความถี่ของการเกิดแผ่นดินไหว พร้อมบทสนทนา เกี่ยวกับการทำนายการเกิดแผ่นดินไหว

นักธรณีวิทยาคนหนึ่งกล่าวว่า “ภายใน 20 ปีข้างหน้า โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวที่เมืองเซตมีถึง 2 ใน 3”

คำถามที่ 1 : แผ่นดินไหว

ข้อใดต่อไปนี้เป็น การตีความที่สะท้อน คำกล่าวของนักธรณีวิทยา คนนั้นได้ดีที่สุด

1. $\frac{2}{3} \times 20 = 13.3$ ดังนั้นระหว่าง 13 และ 14 ปีจากนี้ไป จะเกิดแผ่นดินไหวที่เมืองเซต
2. $\frac{2}{3}$ มากกว่า $\frac{1}{2}$ ดังนั้น ท่านสามารถมั่นใจได้ว่า ในช่วง 20 ปีข้างหน้าจะเกิดแผ่นดินไหวขึ้นที่เมืองเซตอย่างแน่นอน
3. โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวในเมืองเซต ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง ในช่วง 20 ปีข้างหน้าสูงกว่าที่จะไม่เกิดแผ่นดินไหว
4. ไม่สามารถบอกได้ว่าจะเกิดอะไรขึ้น เพราะว่าไม่มีใครแน่ใจว่าจะเกิดแผ่นดินไหวขึ้นเมื่อใด

คะแนนเต็ม

ข้อ 3. โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวในเมืองเซต ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง ในช่วง 20 ปีข้างหน้า สูงกว่าที่จะไม่เกิดแผ่นดินไหว

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : ความน่าจะเป็น

สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์

สมรรถนะ : การสะท้อนการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	67.97
เกาหลี	64.41
ฮ่องกง-จีน	55.61
มาเก๊า-จีน	51.64
ไทย	35.46



สถานการณ์โจทย์

ปัจจุบันสถานการณ์เกี่ยวกับแผ่นดินไหวกำลังเป็นเรื่องที่ประชาชนทั่วโลกให้ความสนใจและติดตามกันอย่างต่อเนื่อง ทั้งนี้เพราะมีการเกิดแผ่นดินไหวที่มีความรุนแรงถี่ขึ้นและเกิดเป็นบริเวณกว้างทั่วโลก มีทั้งเกิดบนบก และในทะเล ถ้าเกิดแผ่นดินไหวที่อยู่ในชั้นวัดความรุนแรงได้มากกว่า 7 ริคเตอร์ และเกิดใต้ทะเล อาจทำให้เกิดคลื่นสึนามิได้ การเกิดแผ่นดินไหวอาจส่งผลกระทบ ทำให้มนุษย์บาดเจ็บ เกิดความสูญเสียทั้งชีวิตและทรัพย์สิน ปัจจุบันยังไม่มีเทคโนโลยีใดที่จะนำมาใช้ เพื่อทำนายได้แน่ชัดว่าจะเกิดแผ่นดินไหวที่จุดใดและมีความรุนแรงเท่าใด นอกจากใช้การคาดการณ์ที่อาศัยการสังเกตแบบรูปของความถี่ของวงรอบที่เกิดแผ่นดินไหวแต่ละขนาด ลักษณะการเลื่อนของเปลือกโลก ความรุนแรงของการสั่นสะเทือนจากหน่วยวัดริคเตอร์ และระยะห่างระหว่างจุดที่มีการสั่นสะเทือนมาประกอบกัน จึงทำให้การทำนายการเกิดแผ่นดินไหวเป็นเพียงการคาดการณ์หรือคาดคะเน ดังเช่นสถานการณ์โจทย์ปัญหาข้อนี้ที่กล่าวถึงการคาดการณ์ของนักธรณีวิทยาคนหนึ่งที่ว่า “ภายใน 20 ปีข้างหน้า โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวที่เมืองเซตมีถึง 2 ใน 3” โจทย์ต้องการให้หาการตีความที่สะท้อนได้ดีที่สุดของคำกล่าวข้างต้น

ในการหาคำตอบที่จะสะท้อนคำกล่าวของนักธรณีวิทยาคนนี้ได้ดีที่สุด นักเรียนจะต้องมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหา การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์กับธรณีวิทยา และใช้เหตุผลในเรื่องความน่าจะเป็นประกอบการตัดสินใจสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ตลอดจนสามารถสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอ จึงจะวิเคราะห์ตัวเลือกในโจทย์ได้อย่างสมเหตุสมผล



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ

1. อัตราส่วนหรือเศษส่วน การเปรียบเทียบเศษส่วน และความรู้สีกเชิงจำนวน การบอกโอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวที่ใช้คำว่า 2 ใน 3 มีความหมายในรูปเศษส่วน คือ $\frac{2}{3}$ หรือ 2 : 3 ในรูปอัตราส่วน
2. โอกาสของเหตุการณ์และความน่าจะเป็น ในสถานการณ์ข้อนี้ การหาคำตอบน่าจะยังไม่มีเจตนาให้ใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาค่าความน่าจะเป็นโดยตรง แต่เจตนาให้ใช้ความรู้สีกเชิงจำนวนเกี่ยวกับเศษส่วนหรืออัตราส่วนมาเป็นตัวชี้บ่งถึงโอกาสการเกิดของเหตุการณ์ที่สนใจจะทำนายในลักษณะการคาดคะเน มากกว่าจะต้องหาค่าของความน่าจะเป็นจากสูตร แล้ววิเคราะห์ผลที่ตามมาด้วยหลักของความน่าจะเป็น และนักเรียนจะต้องมีความรู้รอบตัวว่าในทางธรณีวิทยา ปัจจุบันยังไม่มีเครื่องมือใด ๆ บอกได้ถูกต้องแน่นอนว่าจะเกิดแผ่นดินไหวที่ใดและเมื่อเวลาใด



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

การพิจารณาตัวเลือกและแปลความหมายให้ตรงกับข้อความที่นักธรณีวิทยากล่าวไว้ว่า “ภายใน 20 ปีข้างหน้า โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวที่เมืองเซตมิถึง 2 ใน 3” คำกล่าวนีเป็นการคาดการณ์การเกิดแผ่นดินไหวในอีก 20 ปีข้างหน้า ซึ่งจะเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นก็ได้ แต่จากการให้โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวเป็น 2 ใน 3 ถ้ามองในแง่ของเศษส่วนหรืออัตราส่วน จะเห็นว่า $\frac{2}{3}$ มากกว่า $\frac{1}{2}$ หรือ $\frac{2}{3}$ มากกว่า 50% ในทางทฤษฎีของความน่าจะเป็นจะตอบว่า โอกาสที่จะเกิดแผ่นดินไหวในช่วง 20 ปีข้างหน้าสูงกว่าที่จะไม่เกิดแผ่นดินไหว ดังนั้น ตัวเลือกข้อ 3 จึงเป็นตัวเลือกที่สะท้อนคำกล่าวของนักธรณีวิทยาคนนี้ได้ดีที่สุด

สำหรับตัวเลือกอื่น ๆ จะมีข้อขัดแย้ง หรือข้อความที่แปลความหมายไม่ถูกต้อง หรือไม่ชัดเจน ดังนี้

ตัวเลือก 1 กล่าวว่า “ $\frac{2}{3} \times 20 = 13.3$ ดังนั้นระหว่าง 13 ปี และ 14 ปี จากนี้ไปจะเกิดแผ่นดินไหวที่เมืองเซต ”

เนื่องจาก $\frac{2}{3}$ เป็นอัตราส่วนหรือเศษส่วนที่บอกถึงโอกาสของการเกิดแผ่นดินไหว การนำเวลา 20 ปีมาคูณ ในที่นี้ไม่น่าจะมีความหมายเกี่ยวกับเรื่องที่กำลังกล่าวถึงการที่แปลความหมาย 13.3 เป็นจำนวนปีจากนี้ไปที่จะเกิดแผ่นดินไหวจึงไม่สมเหตุสมผล

ตัวเลือก 2 กล่าวว่า “ $\frac{2}{3}$ มากกว่า $\frac{1}{2}$ ดังนั้นท่านสามารถมั่นใจได้ว่า ในช่วง 20 ปี ข้างหน้าจะเกิดแผ่นดินไหวขึ้นที่เมืองเซตอย่างแน่นอน ”

ตัวเลือก 2 จึงไม่สมเหตุสมผล เพราะผู้กล่าวให้คำตอบในลักษณะที่เกิดแผ่นดินไหวแน่นอน ทั้งที่ใช้ข้อมูลอ้างอิงเพียงว่า $\frac{2}{3}$ มากกว่า $\frac{1}{2}$ ซึ่งแสดงว่ามีโอกาสเกิดแผ่นดินไหวมากกว่าโอกาสที่จะไม่เกิดแผ่นดินไหวเท่านั้น

ตัวเลือก 4 กล่าวว่า “ ไม่สามารถบอกได้ว่าจะเกิดอะไรขึ้น เพราะว่าไม่มีใครแน่ใจว่าจะเกิดแผ่นดินไหวขึ้นเมื่อใด ”

ข้อความในตัวเลือกข้อนี้เป็นการพูดที่เป็นความจริงว่า โดยทั่วไป ไม่มีใครแน่ใจและบอกได้แน่นอนว่าจะเกิดแผ่นดินไหวขึ้นเมื่อใด บริเวณใด เนื่องจากในปัจจุบันยังไม่มีเทคโนโลยีใดจะสามารถคำนวณเวลาและสถานที่เกิดแผ่นดินไหวได้อย่างแน่นอน แต่ในกรณีในเมืองเซต น่าจะมีการวิเคราะห์ปัจจัยแวดล้อมต่าง ๆ จนได้ข้อมูลดังที่โจทย์กำหนด โดยตัวเลือก 4 นี้ไม่ได้ใช้ข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาวิเคราะห์และแปลความหมายเชื่อมโยงในเชิงคณิตศาสตร์กับธรณีวิทยา ตัวเลือก 4 จึงไม่สมเหตุสมผล



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. เป็นที่น่าสังเกตว่านอกจากนักเรียนไทยจะทำข้อสอบข้อนี้ได้ถูกต้องเพียง 35.46 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ประเทศอื่นก็ยังทำได้ถูกต้องเป็นจำนวนไม่มากนัก อาจเป็นเพราะว่าตัวलगแต่ละข้อให้เหตุผลกำกวมที่จะถูกต้องทำให้ตัดสินใจเลือกคำตอบได้ยาก

2. ครูควรนำสถานการณ์ “แผ่นดินไหว” ไปให้นักเรียนได้ฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการวิเคราะห์ข้อความที่ต้องใช้เหตุผล เชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ และกับศาสตร์อื่น ๆ การสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ โดยจัดให้มีการอภิปราย และสรุปคำตอบร่วมกัน

3. ครูอาจให้ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับการเกิดแผ่นดินไหว โดยนำข้อความที่ปรากฏอยู่ในเว็บไซต์หรือในสื่อต่าง ๆ มาสนทนาและอภิปราย เกี่ยวกับมาตราวัดระดับความรุนแรงและความเสียหายที่ได้รับในแต่ละระดับของแรงสั่นสะเทือนจากการเกิดแผ่นดินไหวพอสังเขป ดังนี้

มาตราริกเตอร์ เป็นการกำหนดตัวเลขเพื่อบอกปริมาณของพลังงานแผ่นดินไหวที่ปลดปล่อยออกมาจากการเกิดแผ่นดินไหวครั้งหนึ่ง เป็นมาตราส่วนเชิงลอการิทึมฐานสิบ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากลอการิทึมของแอมพลิจูดการสั่นของการกระจัดที่มีค่ามากที่สุดจากศูนย์บนเครื่องวัดแผ่นดินไหว เช่น เครื่องวัดแผ่นดินไหวที่สามารถวัดค่าได้ 5.0 ริกเตอร์ จะมีแอมพลิจูดการสั่นสะเทือนมากเป็น 10 เท่าของแผ่นดินไหวที่วัดค่าได้ 4.0 ริกเตอร์ (ที่มา : สารานุกรมเสรีวิกิพีเดีย)

ระดับความรุนแรงที่มีผลต่อความรู้สึกรับรู้ของคนที่อยู่ใกล้เคียงและผลกระทบอื่น ๆ จากการรวบรวมข้อมูลในเว็บไซต์ต่าง ๆ พอสรุปเป็นข้อมูลของระดับความรุนแรงได้ดังนี้ ระดับ 1.0 - 2.9 ริกเตอร์ (เล็กน้อย) บริเวณที่อยู่ใกล้รอยเลื่อน บางคนสามารถรับรู้ได้

รู้สึกเหมือนแมคหล่น บางคนมีอาการวิงเวียนเพียงเล็กน้อย

ระดับ 3.0 - 3.9 ริกเตอร์ (เล็กน้อย) คนบนอาคารสูงส่วนใหญ่รับรู้ได้ แต่ยังไม่สร้างความเสียหายที่รุนแรง

ระดับ 4.0 - 4.9 ริกเตอร์ (ปานกลาง) ผู้อาศัยภายในอาคารและนอกอาคารรู้สึกได้ มี

ผลกระทบต่อความเสียหายของเครื่องใช้ และบางส่วนของอาคารเสียหายจนสังเกตได้

ระดับ 5.0 - 5.9 ริกเตอร์ (รุนแรงปานกลาง) คนส่วนใหญ่รู้สึกและมีผลกระทบสร้าง

ความเสียหายกับเครื่องเรือน วัตถุต่างๆ มีการเคลื่อนไหว หรือเคลื่อนที่

สิ่งก่อสร้างที่ไม่แข็งแรงพังทลาย



ระดับ 6.0 - 6.9 ริกเตอร์ (รุนแรง) เป็นระดับที่ถือว่าค่อนข้างรุนแรง มีรัศมีทำลายได้ไกลประมาณ 80 กิโลเมตร สิ่งก่อสร้างที่อยู่ใกล้เคียงจุดศูนย์กลางพังทลายเสียหาย

ระดับ 7.0 - 7.9 ริกเตอร์ (รุนแรงมาก) เป็นระดับความรุนแรง สร้างความเสียหายเป็นวงกว้าง มีรัศมีทำลายได้มากกว่า 80 กิโลเมตร สิ่งก่อสร้างพังทลายเสียหายแผ่นดินแยก วัตถุบนพื้นถูกเหวี่ยงกระเด็น

ระดับ 8.0 - 8.9 ริกเตอร์ จัดเป็นระดับที่รุนแรงมาก สร้างความเสียหายรุนแรงได้ในรัศมีเป็นร้อย ๆ กิโลเมตร โดยสถิติมีการเกิดขึ้นน้อย เฉลี่ยเพียง 1 ครั้งต่อปี

หากแผ่นดินไหวความแรงระดับ 9.0 - 9.9 ริกเตอร์ จัดเป็นระดับ “ล้างผลาญ” เป็นระดับแผ่นดินไหวที่สามารถทำลายทุกอย่างได้ในรัศมีเป็นพันๆ กิโลเมตร ตามสถิติมีการเกิดขึ้นน้อยมาก เฉลี่ยเพียง 1 ครั้งต่อ 20 ปี

4. ครูอาจให้นักเรียนได้อภิปรายถึงเหตุการณ์หลังเกิดแผ่นดินไหวในแต่ละครั้ง เช่น การเกิดอาฟเตอร์ช็อก (After Shock) อาฟเตอร์ช็อกคืออะไร มีระดับกี่ริกเตอร์ เกิดถี่มากน้อยเพียงใด ในประเทศไทยเกิดแผ่นดินไหวบ้างหรือไม่ เกิดที่ใดบ้างและมีขนาดความรุนแรงระดับใด

การอภิปรายควรได้ข้อสรุปว่า อาฟเตอร์ช็อกเป็นการเกิดแผ่นดินไหวขนาดเล็ก อยู่ในระดับที่น้อยกว่า 4 ริกเตอร์ และจะเกิดขึ้นตามหลังจากที่เกิดแผ่นดินไหวหลัก เกิดในพื้นที่รอบ ๆ ตามแนวที่เกิดแผ่นดินไหวหลัก ความถี่ของการเกิดอาฟเตอร์ช็อกบอกไม่ได้แน่นอน ในประเทศไทยเมื่อเดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2557 มีการเกิดแผ่นดินไหวค่อนข้างรุนแรงประมาณ 6 ริกเตอร์ ที่อำเภอพาน อำเภอแม่ลาว และอำเภอแม่สรวย จังหวัดเชียงราย ทำให้เกิดความเสียหาย อาคารบ้านเรือนพังทลายหลายหลัง และมีอาฟเตอร์ช็อกเกิดขึ้นเกือบ 1,000 ครั้ง

นอกจากนี้ครูอาจแนะนำถึงการปฏิบัติตัวหากเกิดแผ่นดินไหวในชั้นที่รู้สึกได้ หรือในชั้นที่มีความรุนแรงปานกลางว่าต้องทำอะไร และต้องปฏิบัติตัวอย่างไรบ้าง

การสนับสนุนประธานาธิบดี

ในประเทศเซดแลนด์ มีการสำรวจความเห็นเกี่ยวกับการสนับสนุนประธานาธิบดีในการเลือกตั้งที่กำลังจะมาถึง หนังสือพิมพ์สี่ฉบับแยกกันสำรวจความเห็นทั่วประเทศ ปรากฏผลการสำรวจดังนี้ หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 1: 36.5% (ทำแบบสำรวจในวันที่ 6 มกราคม ใช้กลุ่มตัวอย่าง 500 คน โดยสุ่มจากประชากรที่มีสิทธิเลือกตั้ง)

หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 2: 41.0% (ทำแบบสำรวจในวันที่ 20 มกราคม ใช้กลุ่มตัวอย่าง 500 คน โดยสุ่มจากประชากรที่มีสิทธิเลือกตั้ง)

หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3: 39.0% (ทำแบบสำรวจในวันที่ 20 มกราคม ใช้กลุ่มตัวอย่าง 1000 คน โดยสุ่มจากประชากรที่มีสิทธิเลือกตั้ง)

หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 4: 44.5% (ทำแบบสำรวจในวันที่ 20 มกราคม ใช้กลุ่มตัวอย่าง 1000 คน โดยผู้อ่านหนังสือพิมพ์โทรศัพท์เข้ามาออกเสียง)

คำถามที่ 1 : การสนับสนุนประธานาธิบดี

ผลสำรวจของหนังสือพิมพ์ฉบับใด น่าจะพยากรณ์ระดับการสนับสนุนประธานาธิบดีได้ดีที่สุด ถ้าการเลือกตั้งจะมีขึ้นในวันที่ 25 มกราคม จงให้เหตุผลสองข้อเพื่อสนับสนุนคำตอบด้วย

คะแนนเต็ม

หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 การสำรวจฯ เป็นปัจจุบันมากกว่า เป็นการสุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่กว่า และถามเฉพาะผู้มีสิทธิเลือกตั้ง (ให้เหตุผลอย่างน้อยสองเหตุผล) ไม่สนใจข้อมูลเพิ่มเติม (รวมถึงข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องหรือไม่ถูกต้อง) เช่น

- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 เพราะเขาได้สุ่มเลือกประชาชนที่มีสิทธิลงคะแนนมากกว่า
- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 เพราะเขาได้ถาม 1000 คน โดยการสุ่มเลือก และดำเนินการในวันที่ใกล้เคียงวันเลือกตั้ง ดังนั้นผู้มีสิทธิเลือกตั้งมีเวลาที่จะเปลี่ยนใจน้อยลง
- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 เพราะพวกเขาถูกสุ่มเลือก และต่างมีสิทธิลงคะแนน
- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 เพราะเขาสำรวจจำนวนประชาชนมากกว่า และใกล้เคียงเลือกตั้งมากกว่า
- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 เพราะทุกคนทั้ง 1000 คนถูกสุ่มเลือก

ได้คะแนนบางส่วน

ตอบว่าหนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 แต่ให้เหตุผลเพียงหนึ่งข้อ หรือไม่มีคำอธิบายเลย

- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 เพราะว่าวันสำรวจใกล้เคียงเลือกตั้งมากกว่า
- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 มีคนถูกสำรวจมากกว่าฉบับที่ 1 และ 2
- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ เช่น

- หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 4 การที่มีประชาชนมากกว่า ย่อมหมายถึงผลที่แน่นอนกว่าและคนที่โทรศัพท์เข้ามาออกเสียง จะต้องพิจารณาการออกเสียงของเขาเป็นอย่างดีแล้ว

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : -

สถานการณ์ : ในเชิงชุมชน

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	46.78
เกาหลี	45.51
ฮ่องกง-จีน	48.46
มาเก๊า-จีน	37.31
ไทย	16.54



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

ในสถานการณ์นี้ กล่าวถึงผลสำรวจความเห็นเกี่ยวกับการสนับสนุนประธานาธิบดี ในการเลือกตั้งที่กำลังจะมาถึงของหนังสือพิมพ์สี่ฉบับ ที่ได้ทำการสำรวจความเห็นทั่วประเทศ โดยให้ข้อมูลผลสำรวจ วันที่สำรวจ จำนวนตัวอย่างและลักษณะของกลุ่มตัวอย่าง การตอบคำถามที่ 1 ของโจทย์ ต้องการให้นักเรียนวิเคราะห์ข้อมูลจากหนังสือพิมพ์ ทั้งสี่ฉบับว่าข้อมูลของหนังสือพิมพ์ฉบับใดน่าจะเป็นข้อมูลที่พยากรณ์ระดับการสนับสนุน ประธานาธิบดีได้ดีที่สุด โดยให้เหตุผลสองข้อเพื่อสนับสนุนคำตอบด้วย



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องใช้ความน่าจะเป็น และสถิติที่เกี่ยวข้องกับการสำรวจและการเก็บรวบรวมข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล การเลือกใช้ข้อมูลที่ต้องพิจารณาถึงความน่าเชื่อถือเกี่ยวกับกลุ่มตัวอย่าง แหล่งที่มาของข้อมูล รวมถึงวิธีการได้มาของข้อมูล ซึ่งความเกี่ยวข้องทั้งหลายที่กล่าวมามีผลต่อการนำมาใช้ในทางสถิติและการตัดสินใจ ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่พัฒนาโดย สสวท. ได้ให้ความรู้เกี่ยวกับวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลและแหล่งข้อมูลพร้อมตัวอย่างสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้และนำไปใช้ได้เป็นอย่างดี การหาคำตอบ ในสถานการณ์นี้นักเรียนอาจต้องใช้ความสามารถในเรื่องของทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสังคมศึกษา



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 ผลการสำรวจของหนังสือพิมพ์ฉบับใด น่าจะพยากรณ์ระดับการสนับสนุน ประธานาธิบดีได้ดีที่สุด ถ้าการเลือกตั้งจะมีขึ้นในวันที่ 25 มกราคม จงให้เหตุผลสองข้อเพื่อสนับสนุนคำตอบด้วย

จากคำถามข้างต้น นักเรียนจะต้องเข้าใจถึงพื้นฐานของการวิเคราะห์ข้อมูลที่ปรากฏ ในผลการสำรวจของหนังสือพิมพ์ทั้งสี่ฉบับ ดังนี้

1. ข้อมูลเกี่ยวกับเวลา ต้องเลือกข้อมูลที่เป็นปัจจุบันหรือมีผลสำรวจใกล้วันเลือกตั้งวันที่ 25 มกราคม มากที่สุด จึงจะได้ผลที่ใกล้เคียงความจริง ดังนั้น หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 1 ซึ่งสำรวจวันที่ 6 มกราคม ต่างจากหนังสือพิมพ์ฉบับอื่น ๆ ที่สำรวจในวันที่ 20 มกราคม ซึ่งใกล้เคียงวันเลือกตั้งมากกว่า นักเรียนจึงไม่ควรเลือกหนังสือพิมพ์ฉบับที่ 1



2. ข้อมูลเกี่ยวกับขนาดตัวอย่าง ต้องเลือกข้อมูลที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ที่สุด เพราะจะเป็นตัวแทนของประชากรที่มีสิทธิเลือกตั้งได้มากที่สุด คำตอบของสถานการณ์นี้ จึงน่าจะเลือกพิจารณาหนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 และฉบับที่ 4 ซึ่งใช้กลุ่มตัวอย่าง 1,000 คน เท่ากัน ขณะที่หนังสือพิมพ์ ฉบับที่ 1 และที่ 2 แต่ละฉบับใช้กลุ่มตัวอย่างเพียง 500 คน เท่ากัน

3. ข้อมูลเกี่ยวกับประชากรที่สุ่มตัวอย่างมา ควรเลือกจากประชากรกลุ่มที่มีสิทธิเลือกตั้งจึงจะทำให้ได้ผลใกล้เคียงความจริงมากกว่า จะเห็นได้ว่า หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 4 ใช้กลุ่มตัวอย่างจากประชากรกลุ่มผู้อ่านหนังสือพิมพ์โทรศัพท์เข้ามาออกเสียง ซึ่งอาจมีจำนวนประชากรทั้งที่มีสิทธิเลือกตั้งและไม่มีสิทธิเลือกตั้ง ทำให้กลุ่มตัวอย่างนี้ไม่ใช่ตัวแทนที่ดีในการพยากรณ์การสนับสนุนประธานาธิบดีของสถานการณ์นี้

จากการวิเคราะห์ข้อมูลดังกล่าวข้างต้น จึงสรุปได้ว่า คำตอบของสถานการณ์นี้ คือ หนังสือพิมพ์ฉบับที่ 3 ที่น่าจะพยากรณ์ได้ดีที่สุด เพราะมีข้อมูลเกี่ยวกับการสำรวจสอดคล้องใน 3 ประเด็นข้างต้น กล่าวคือ สำรวจวันที่ 20 มกราคม ซึ่งใกล้เคียงวันเลือกตั้ง คือวันที่ 25 มกราคม มากที่สุด จำนวนตัวอย่าง 1,000 คนเป็นจำนวนที่มากที่สุด ในสถานการณ์นี้ และกลุ่มตัวอย่างที่ให้ข้อมูลก็เป็นผู้ที่มีสิทธิเลือกตั้งทุกคน ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ตรงเป้าหมายที่สุด



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ครูควรให้คำแนะนำเกี่ยวกับการทำแบบสำรวจในชีวิตประจำวัน ซึ่งนักเรียนจะพบเห็นได้จากการทำโพลของหน่วยงานต่างๆ ที่นิยมทำการสำรวจข้อมูลกับสถานการณ์ที่กำลังอยู่ในความสนใจของประชาชน เพื่อนำเสนอความคิดเห็นและสะท้อนให้สังคมทราบว่าประชาชนส่วนใหญ่คิดอย่างไร เช่น การสำรวจราคาสินค้าหมวดอาหารบริโภคหลังรัฐบาลประกาศเพิ่มค่าแรงขั้นต่ำเป็นวันละ 300 บาท ครูควรสอนให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการให้ข้อมูล ผู้ให้ข้อมูลจะต้องให้ตามความเป็นจริง เพราะข้อมูลจริงจะทำให้ผลการสำรวจมีความเที่ยงตรง เชื่อถือได้ อีกประการหนึ่งถ้านักเรียนเป็นผู้สำรวจ นักเรียนจะต้องคำนึงถึงกลุ่มตัวอย่างที่ไปเก็บข้อมูล ซึ่งจะต้องให้มีความหลากหลายของสถานภาพ เช่น อาชีพ รายได้ เพศ การศึกษา เพราะกลุ่มตัวอย่างจะเป็นตัวแทนของประชากรทั้งหมด ถ้ากลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มเฉพาะที่ไม่ได้เกิดจากการสุ่มจริง จะทำให้ผลสำรวจขาดความเที่ยงตรง มีโอกาสเบี่ยงเบน เอนเอียงไปทางใดทางหนึ่งได้ ทำให้ผลสำรวจขาดความน่าเชื่อถือ ครูอาจกำหนดสถานการณ์เพื่อให้นักเรียนออกแบบการสำรวจที่มีการกำหนดกลุ่มตัวอย่างและจำนวนของตัวอย่างลักษณะการทำให้ได้มาของข้อมูลและอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง แล้วนำมาอภิปรายถกเถียงกันในห้องเรียนว่าของใครที่ออกแบบมาได้ดีที่สุด เพราะเหตุใด



2. ถ้าพิจารณาถึงจำนวนนักเรียนที่สามารถตอบคำถามของสถานการณ์นี้ได้ถูกต้องพบว่า ทุกประเทศตอบได้ถูกต้องเป็นจำนวนน้อยไม่ถึง 50 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนของตัวเองที่เข้าสอบ โดยเฉพาะนักเรียนไทยที่ตอบถูกต้องมีจำนวนน้อยมากเพียง 16.54 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบเท่านั้น สันนิษฐานได้ว่า นักเรียนขาดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้เหตุผลประกอบการวิเคราะห์ข้อมูลที่ต้องใช้ข้อมูลส่วนที่อยู่ในวงเล็บมาประกอบการพิจารณาตัดสินใจแต่นักเรียนอาจมองเพียงเปอร์เซนต์ที่มากที่สุดเท่านั้น ซึ่งพบว่าหนังสือพิมพ์ฉบับที่ 4 มีผลสำรวจสูงสุด 44.5% จึงเลือกข้อนี้เป็นคำตอบของสถานการณ์นี้ หรือนักเรียนอาจขาดการสังเกตที่มาของข้อมูลในข้อ 4 ซึ่งมีความแตกต่างจากที่มาของข้อมูลข้ออื่น ๆ

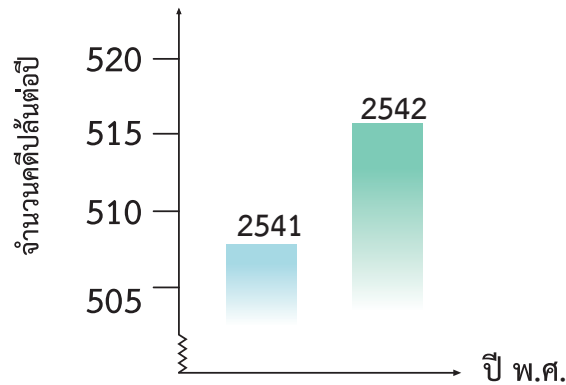
3. เพื่อเสริมทักษะและประสบการณ์เกี่ยวกับการใช้ข้อมูลทางสถิติ ครูอาจหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่นักเรียนต้องใช้ความรู้ในเรื่องข้อมูลและการนำเสนอข้อมูล ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่พัฒนาโดย สสวท. มาชี้แนะเพิ่มเติม



คดีปล้น



นักข่าวโทรทัศน์แสดงกราฟต่อไปนี้ และรายงานว่า
“กราฟแสดงให้เห็นว่าคดีปล้นในปี พ.ศ. 2542 มีจำนวนเพิ่มขึ้นจากปี พ.ศ. 2541 มาก”



คำถามที่ 2 : คดีปล้น

นักเรียนคิดว่าคำพูดของนักข่าวคนนี้เป็น การแปลความหมายกราฟอย่างสมเหตุสมผลหรือไม่ พร้อมเขียนคำอธิบายสนับสนุนคำตอบของนักเรียน

.....

.....

หมายเหตุ: การใช้คำ “ไม่ใช่” ในรหัสเหล่านี้หมายถึงข้อความทั้งหมดที่แสดงว่า การแปลความหมายของกราฟ ไม่สมเหตุสมผล และใช้คำว่า “ใช่” หมายถึงข้อความทั้งหมดที่แสดงว่า การแปลความหมายของกราฟได้สมเหตุสมผล โปรดประเมินว่าคำตอบของนักเรียนนั้น แสดงว่าตีความกราฟได้สมเหตุสมผลหรือไม่ อย่าดูเพียงคำว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” เป็นเกณฑ์ในการให้คะแนนเท่านั้น

คะแนนเต็ม

ตอบว่าไม่ใช่หรือไม่สมเหตุสมผล โดยให้ความสำคัญตรงข้อเท็จจริงที่ว่า มีกราฟที่แสดงให้เห็นได้เพียงส่วนน้อยเท่านั้น เช่น

- ไม่สมเหตุสมผล ควรแสดงรูปกราฟทั้งหมดไว้ด้วย
- ข้าพเจ้าไม่คิดว่า การแปลความหมายของกราฟจะสมเหตุสมผล เพราะถ้าแสดงกราฟไว้ทั้งหมดก็จะเห็นว่าคดีปล้นเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น
- ไม่ใช่ เพราะว่าเขาแสดงกราฟเฉพาะส่วนบนเท่านั้น ถ้าดูกราฟทั้งหมดจากช่วง 0 – 520 จะเห็นว่าไม่เพิ่มสูงขึ้นมากนัก
- ไม่ใช่ เพราะว่าถ้าดูจากกราฟดูเหมือนจะเพิ่มขึ้นมาก แต่ถ้าดูจากตัวเลข จะเห็นว่าเพิ่มขึ้นไม่มากนัก หรือ ตอบว่าไม่ใช่หรือไม่สมเหตุสมผล โดยคำตอบมีค่าแย้งในเชิงของอัตราส่วน หรือ ร้อยละที่เพิ่มขึ้น เช่น
- ไม่ใช่, ไม่สมเหตุสมผล คดีปล้นเพิ่มขึ้น 10 คดี ถือว่าไม่มากนักเมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนทั้งหมดที่มี 500 คดี
- ไม่ใช่ ไม่สมเหตุสมผล เมื่อคิดเป็นร้อยละ มีการเพิ่มขึ้นประมาณ 2% เท่านั้น
- ไม่ใช่ คดีปล้นเพิ่มขึ้น 8 คดี หมายถึง เพิ่มขึ้นร้อยละ 1.5 ซึ่งข้าพเจ้าเห็นว่าไม่มากนัก
- ไม่ใช่ ปีนี้คดีปล้นเพิ่มขึ้นเพียง 8 หรือ 9 คดี เมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนคดี 507 คดีแล้ว ถือว่าเพิ่มขึ้นไม่มากนัก หรือ บอกแนวโน้มของข้อมูลก่อนที่จะตัดสินว่า เพิ่มขึ้นมากหรือไม่มาก เช่น
- เราไม่สามารถบอกได้ว่า การเพิ่มขึ้นนั้นมากหรือไม่ ถ้าในปี พ.ศ. 2540 และ พ.ศ. 2541 มีคดีปล้นเท่ากันแล้วก็อาจบอกได้ว่าคดีปล้น ในปี พ.ศ. 2542 เพิ่มมากขึ้น
- ไม่มีทางบอกได้ว่าการเพิ่มขึ้นมากขนาดไหน เพราะอย่างน้อยต้องทราบค่าการเปลี่ยนแปลง 2 ค่า จึงจะบอกได้ว่าค่าหนึ่งมาก และอีกค่าหนึ่งน้อย



ได้คะแนนบางส่วน

ตอบว่าไม่ใช่หรือไม่สมเหตุผล แต่ไม่อธิบายในรายละเอียด

- ให้ความสำคัญกับการเพิ่มของตัวเลขของจำนวนคิตป์ลันเท่านั้น แต่ไม่เปรียบเทียบกับคิตป์ลันทั้งหมด
- ไม่สมเหตุผล คิตป์ลันมีเพิ่มขึ้นประมาณ 10 ครั้ง คำว่า “มาก” ไม่ได้อธิบายว่าเป็นจำนวนเท่าไร จำนวนคิตป์ลันที่เพิ่มขึ้นมีประมาณ 10 ครั้ง จึงไม่คิดว่าเพิ่มขึ้นมาก
- การเพิ่มจากจำนวน 508 เป็น 515 เป็นการเพิ่มที่ไม่มาก
- ไม่ใช่, เพราะการเพิ่มจำนวน 8 หรือ 9 นั้น ไม่ใช่จำนวนมาก
- ก็คิดว่าเพิ่มขึ้นจาก 507 เป็น 515 มีการเพิ่มขึ้น แต่ไม่มาก

หมายเหตุ : มาตราส่วนบนกราฟไม่ชัดเจน ให้ถือว่าจำนวนคิตป์ลันเพิ่มขึ้น 5 – 15 คิตป์

หรือ ตอบว่าไม่ใช่หรือไม่สมเหตุผล พร้อมทั้งให้วิธีการคิดที่ถูกต้อง แต่มีการคิดคำนวณผิดพลาดบ้าง

- วิธีการและข้อสรุปถูกต้อง แต่คำนวณค่าร้อยละได้ 0.03%

ไม่มีคะแนน

ตอบว่าไม่ใช่ โดยให้คำอธิบายไม่เพียงพอหรือไม่ถูกต้อง เช่น

- ไม่ใช่ ข้าพเจ้าไม่เห็นด้วย
- ผู้รายงานไม่ควรใช้คำว่า “มาก”
- ไม่ใช่ ไม่สมเหตุผล ผู้รายงานมักสร้างภาพเกินความเป็นจริงเสมอ

หรือ ตอบว่าใช่ เน้นที่ลักษณะของกราฟและบอกว่ามีคิตป์ลันเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า เช่น

- ใช่ กราฟมีความสูงเป็นสองเท่า
- ใช่ จำนวนคิตป์ลันเพิ่มขึ้นเกือบเป็นสองเท่า

หรือ ตอบว่าใช่ ไม่มีคำอธิบายหรือคำอธิบายเป็นอย่างอื่น หรือคำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ความไม่แน่นอน

แขนงวิชา : สถิติ

สถานการณ์ : ในชุมชน

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 29.06

เกาหลี 28.00

ฮ่องกง-จีน 39.70

มาเก๊า-จีน 27.35

ไทย 11.15

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์โจทย์ในข้อนี้เป็นเรื่อง สถิติที่เกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลในรูปของ แผนภูมิแท่งที่รายงานคดีปล้น โดยเปรียบเทียบจำนวนคดีที่เพิ่มขึ้นระหว่างปี พ.ศ. 2541 และปี พ.ศ. 2542 ที่นักข่าวโทรทัศน์สรุปว่า มีคดีปล้นในปี พ.ศ. 2542 เพิ่มจากปี พ.ศ. 2541 มาก ซึ่งการนำเสนอข้อมูลนี้ มีการย่นส่วนแสดงจำนวนคดีปล้นในช่วง 0 - 500 คดีแรกและแสดงเฉพาะคดีปล้นในช่วง 500-520 คดีหลังของปี พ.ศ. 2541 และปี พ.ศ. 2542 โดยปี พ.ศ. 2541 มีคดีเกิดขึ้นประมาณ 508 คดี และปี พ.ศ. 2542 มีคดีเกิดขึ้นประมาณ 516 คดี สถานการณ์นี้มีการนำเสนอข้อมูลโดยย่นข้อมูลส่วนใหญ่บนแกนตั้งและขยายข้อมูลส่วนน้อยที่แสดงความแตกต่างกัน เพื่อให้เห็นแตกต่างกันมาก โดยใช้ระยะ 5 หน่วยต่อหนึ่งช่วงระยะที่ระบุมา



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการตอบปัญหาข้อนี้ นักเรียนต้องมีความรู้เกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูล การอ่าน วิเคราะห์และการแปลความหมายเพื่อการนำไปใช้และการตัดสินใจด้วยความสมเหตุสมผล ตลอดจนรู้เท่าทันต่อการใช้สถิติในทางไม่เหมาะสม เช่นการนำเสนอข้อมูลที่มีเจตนาสื่อสาร สื่อความหมายให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการอ่านและแปลความหมาย ดังเช่นสถานการณ์นี้ ซึ่งในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ ของ สสวท. ได้ให้ความรู้เกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนในการใช้สถิติ เพื่อให้นักเรียนได้ตระหนักถึงความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่อาจเกิดขึ้นได้โดยเจตนาหรือไม่เจตนาในเกือบทุกขั้นตอนของการดำเนินการทางสถิติ มีตัวอย่างสถานการณ์อย่างหลากหลายเพียงพอ



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 ให้นักเรียนอธิบายว่าข้อสรุปของนักข่าวโทรทัศน์ผู้รายงานที่กล่าวว่า ข้อมูลที่นำเสนอด้วยแผนภูมิแท่งในโจทย์ แสดงถึงในปี พ.ศ. 2542 มีจำนวนคดีปล้นเพิ่มขึ้นจากปี พ.ศ. 2541 มาก การแปลความหมายข้อมูลของนักข่าวคนนี้ มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ พร้อมเขียนคำอธิบายสนับสนุนคำตอบของนักเรียน

จากแผนภูมิแท่งที่กำหนดในสถานการณ์นี้ ผู้นำเสนอน่าจะมีเจตนาบิดเบือนข้อเท็จจริงมากกว่า สังเกตได้จากการเขียนกราฟที่มีการย่นระยะในช่วงต้น ๆ ของการ แสดงจำนวนคดีปล้น และใช้เทคนิคการกำหนดมาตราส่วน เพื่อแสดงความสูงตรงส่วน



ปลายของแต่ละปี พ.ศ. ให้เห็นว่าช่วงความสูงห่างกันมาก ทั้งนี้เป็นเจตนาของผู้สร้างสถานการณ์ที่ต้องการวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการตระหนักถึงความคลาดเคลื่อนจากการนำเสนอข้อมูล ถ้าผู้นำเสนอข้อมูลต้องการให้ข้อเท็จจริงและสรุปผลได้ อย่างสมเหตุสมผล แผนภูมิแท่งในสถานการณ์นี้น่าเพิ่มคติปล้นในปีก่อน พ.ศ. 2541 มาประกอบด้วย เพื่อวิเคราะห์ว่าในปีก่อนๆ นั้น จำนวนคติปล้นมีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

ปัญหาข้อนี้ตอบว่า ไม่ใช่ หรือไม่สมเหตุสมผล เพราะถ้าพิจารณาจากจำนวนคติปล้นทั้งหมดตลอดปี พ.ศ. 2541 มีประมาณ 508 คดี และปี พ.ศ. 2542 มีประมาณ 516 คดี การมีจำนวนคติเพิ่มขึ้น 8 คดี จากจำนวนคติปล้นที่ใช้เป็นฐานข้อมูลเปรียบเทียบในปี พ.ศ. 2541 คิดเป็นอัตราส่วนของจำนวนคติปล้นที่เพิ่มขึ้นประมาณ $8 : 508$ หรือประมาณ $\frac{8}{508}$ หรือ 1.6% ซึ่งถือว่าเป็น จำนวนที่ไม่มาก

จากแนวการเฉลยคำตอบที่ให้คะแนนเต็ม ระบุเหตุผลที่ประกอบคำตอบว่า “ไม่ใช่” ไว้อย่างหลากหลายตามมุมมองของนักเรียน กล่าวคือ

- ถ้าพิจารณาจากกราฟอาจจะบอกด้วยเหตุผล เช่น
ไม่ใช่ เพราะถ้าดูจากกราฟดูเหมือนจะเพิ่มขึ้นมาก แต่ถ้าดูจากตัวเลขจะเห็นว่าเพิ่มขึ้นไม่มากนัก
ไม่ใช่ เพราะกราฟแสดงเฉพาะส่วนบนเท่านั้น ถ้าดูกราฟทั้งหมดจากช่วง 0 – 520 จะเห็นว่าไม่เพิ่มสูงขึ้นมากนัก
- ถ้าพิจารณาจากแนวโน้มของข้อมูล อาจบอกเหตุผลในลักษณะต้องเปรียบเทียบข้อมูลกับปีก่อน ๆ ที่ผ่านมา ถ้าที่ผ่านมามีจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากัน ก็อาจตอบว่าคดีในปี 2542 เพิ่มขึ้นมากก็ได้

ในการให้คะแนนมีข้อสังเกตว่าแนวการให้คะแนนเน้นการให้เหตุผลมากกว่าการดูคำตอบว่า ใช่ หรือ ไม่ใช่ เพราะมีเกณฑ์ให้คะแนนสำหรับการให้เหตุผลที่นักเรียนเขียนไม่ชัดเจนหรือมีความถูกต้องเป็นบางส่วนด้วย เช่น อธิบายว่าการเพิ่มจากจำนวน 508 เป็น 515 ถือว่าเพิ่มไม่มาก นักเรียนจะได้คะแนนบางส่วน แต่ถ้าตอบเพียงว่า ไม่ใช่ เพียงอย่างเดียว หรือให้เหตุผลไม่สมเหตุสมผลก็จะได้คะแนนเลย



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ครูอาจให้แนวคิดถ้าแผนภูมิแท่งที่กำหนดให้นี้มีข้อมูลของปีก่อน ๆ มาเปรียบเทียบกับอีกประมาณ 3 ปี และมีข้อมูลแสดงให้เห็น เช่น ปีใดมีคดีลดลง คงที่ หรือมีคดีเพิ่มขึ้น และถ้าปี 2540 มีคดีลดลงจากปีก่อน ๆ ก็อาจถือว่าการมีคดีปล้นเพิ่มขึ้น 1.6 % ในปี พ.ศ. 2542 เป็นการเพิ่มที่มากขึ้นกว่าทุก ๆ ปี ได้

ในชีวิตประจำวันนักเรียนจะพบการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งนักเรียนจะต้องมีความเข้าใจและระมัดระวังในการอ่าน การแปลความหมายข้อมูลที่นำเสนอตามรูปแบบเหล่านั้น ตลอดจนเข้าใจถึงความคลาดเคลื่อนที่มักเกิดขึ้นจากการนำเสนอข้อมูลที่ผู้นำเสนออาจมีเจตนานำเสนอเพื่อผลประโยชน์บางประการ หรือเจตนาเสนอเพื่อให้เกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อน ดังเช่นสถานการณ์คดีปล้นก็เป็นการนำเสนอที่มีข้อมูลไม่ชัดเจน เกี่ยวกับการย่นระยะแสดงจำนวนคดีปล้นในช่วง 0 - 500 คดี และการขยายส่วนสูงของแท่งข้อมูลให้เห็นว่ามีขนาดแตกต่างกันมาก ทำให้การอ่านและการแปลความหมายกราฟไม่สมเหตุสมผล

2. ถ้าพิจารณาจากคำตอบอื่น ๆ ของนักเรียนและการให้คะแนน จะเห็นว่านักเรียนที่ตอบถูกเกือบทุกประเทศตามที่ระบุ มีจำนวนน้อยมากคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ไม่ถึง 40 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนของตัวเองที่เข้าสอบ โดยเฉพาะนักเรียนไทยมีจำนวนที่ทำถูกต้องน้อยมากเพียง 11.15 เปอร์เซ็นต์เท่านั้น คาดว่าน่าจะมีผลมาจากนักเรียนส่วนใหญ่ขาดทักษะในด้านการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล โดยให้เหตุผลสั้นๆ ที่ยังขาดความชัดเจนตรงประเด็น เช่น ตอบว่า ไม่ใช่หรือไม่สมเหตุสมผล เพราะการเพิ่มจำนวน 8 หรือ 9 นั้น ไม่ใช่จำนวนมาก และคงมีจำนวนไม่น้อยที่ไม่อธิบายเหตุผลประกอบเลย

3. ในการจัดการเรียนรู้เรื่องกราฟ หรือสถิติเกี่ยวกับการอ่าน วิเคราะห์และแปลความหมายข้อมูล ครูจะต้องให้ความสำคัญกับการสอนให้นักเรียนระมัดระวังข้อมูลที่มีการนำเสนอโดยเจตนาบิดเบือนทางสถิติ หรือใช้สถิติในการบิดเบือนข้อมูล ซึ่งปัจจุบันจะพบเห็นอยู่บ่อย ๆ ในสื่อต่าง ๆ นักเรียนจะต้องตระหนักถึงในเรื่องนี้ให้มาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในยุคปัจจุบันที่เป็นยุคสังคมออนไลน์ มีการส่งข้อความถึงกันอย่างรวดเร็ว การให้ข้อมูล ข้อสรุปเหล่านั้นมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ หรือข้อมูลทางสถิติเหล่านั้นเชื่อถือได้หรือไม่ มีเจตนาแอบแฝงประการใดหรือไม่ ครูจะต้องจัดกิจกรรมหรือหาสถานการณ์ที่ใช้สถิติไม่เหมาะสมอย่างหลากหลายซึ่งพบอยู่ในชีวิตประจำวันมาให้นักเรียนได้ศึกษาเรียนรู้ร่วมกัน ถกเถียง อภิปราย หาข้อโต้แย้งหรือให้เหตุผลสนับสนุนอย่างสมเหตุสมผล เพื่อให้นักเรียนมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล การเชื่อมโยง



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ นักเรียนสามารถวิเคราะห์ปัญหาได้หลายแง่มุม คิดกว้างและรอบด้าน รวมถึงใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนมาวิเคราะห์ร่วมด้วย

เป็นที่น่าสังเกตจากการเฉลยการให้คะแนนเต็ม คะแนนบางส่วน และไม่มีคะแนนว่า ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการตอบว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” หรือ “สมเหตุสมผล” หรือ “ไม่สมเหตุสมผล” แต่อยู่ที่การเขียนอธิบายประกอบคำตอบให้ตรงประเด็น คือ จำนวนคดีที่เพิ่มขึ้นโดยตัวมันเองบอกไม่ได้ว่ามาก หรือไม่มาก แต่จะบอกได้เมื่อทราบว่าจำนวนคดีที่เพิ่มขึ้นนั้นเทียบกับจำนวนใด

4. นอกจากสอนให้นักเรียนใช้สถิติอย่างถูกต้องแล้ว ครูควรให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการวิเคราะห์สถานการณ์ที่ใช้สถิติที่ไม่เหมาะสมอย่างหลากหลายจากเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่พบในชีวิตประจำวัน

5. ควรฝึกฝนการเขียนอธิบายเหตุผลประกอบคำตอบอย่างสมเหตุสมผลตรงประเด็น ตั้งแต่เหตุผลง่าย ๆ สั้น ๆ และค่อย ๆ เป็นเหตุผลที่ซับซ้อนขึ้น เพราะการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล อาจมีความสำคัญกว่าคำตอบว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” การฝึกให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ปัญหาหลายแง่มุม จะทำให้นักเรียนคิดกว้างและรอบคอบ

ต่อไปนี้เป็นสถานการณ์โจทย์ที่ครูสามารถนำมาให้นักเรียนฝึกการใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอข้อมูลที่เหมาะสมและสมเหตุสมผลทางสถิติ

ผลกำไรประจำปีของบริษัทเชี่ยวชาญการค้า

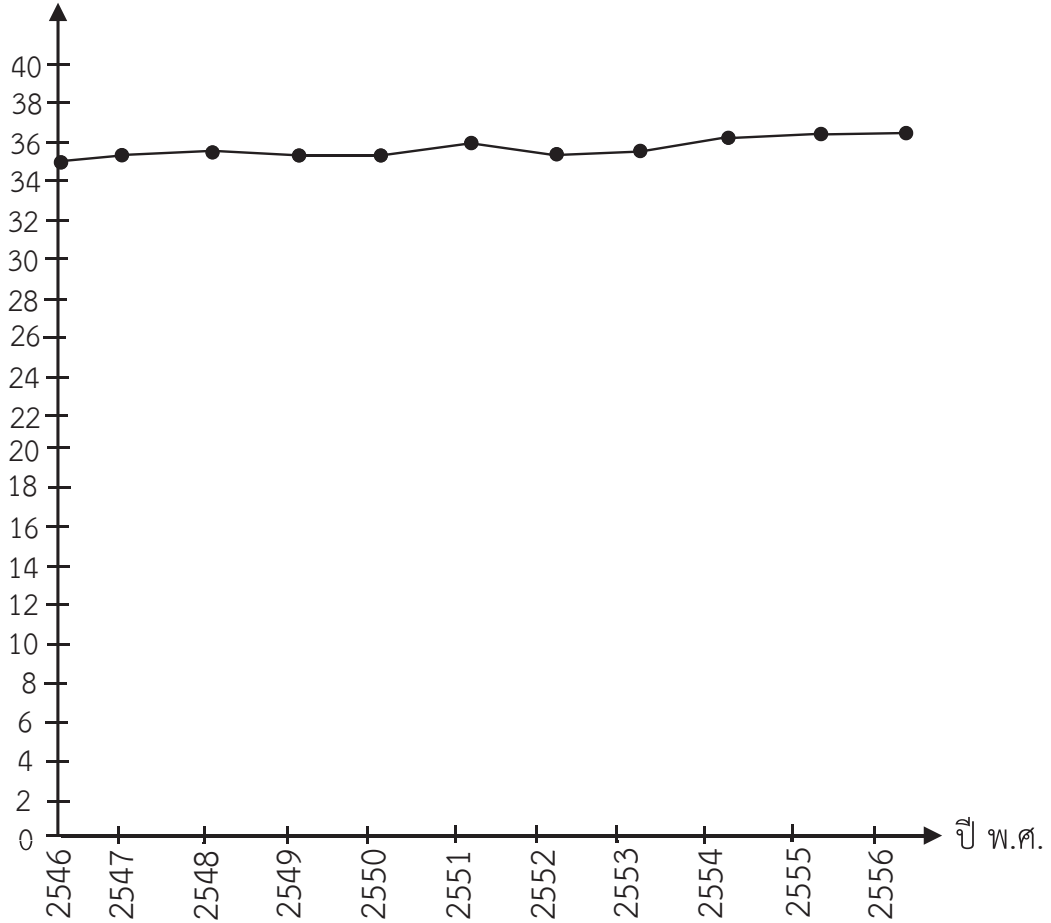
บริษัทเชี่ยวชาญการค้า มีผลกำไรประจำปีระหว่าง ปี พ.ศ. 2546 – 2556 ดังตารางต่อไปนี้

ปี พ.ศ.	ผลกำไร (หน่วยเป็นล้านบาท)
2546	35.0
2547	35.5
2548	35.7
2549	35.7
2550	35.8
2551	36.0
2552	35.7
2553	35.9
2554	36.2
2555	36.4
2556	36.5



จากข้อมูลข้างต้นได้มีการนำเสนอข้อมูลด้วยกราฟเส้นดังรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ต่อไปนี้

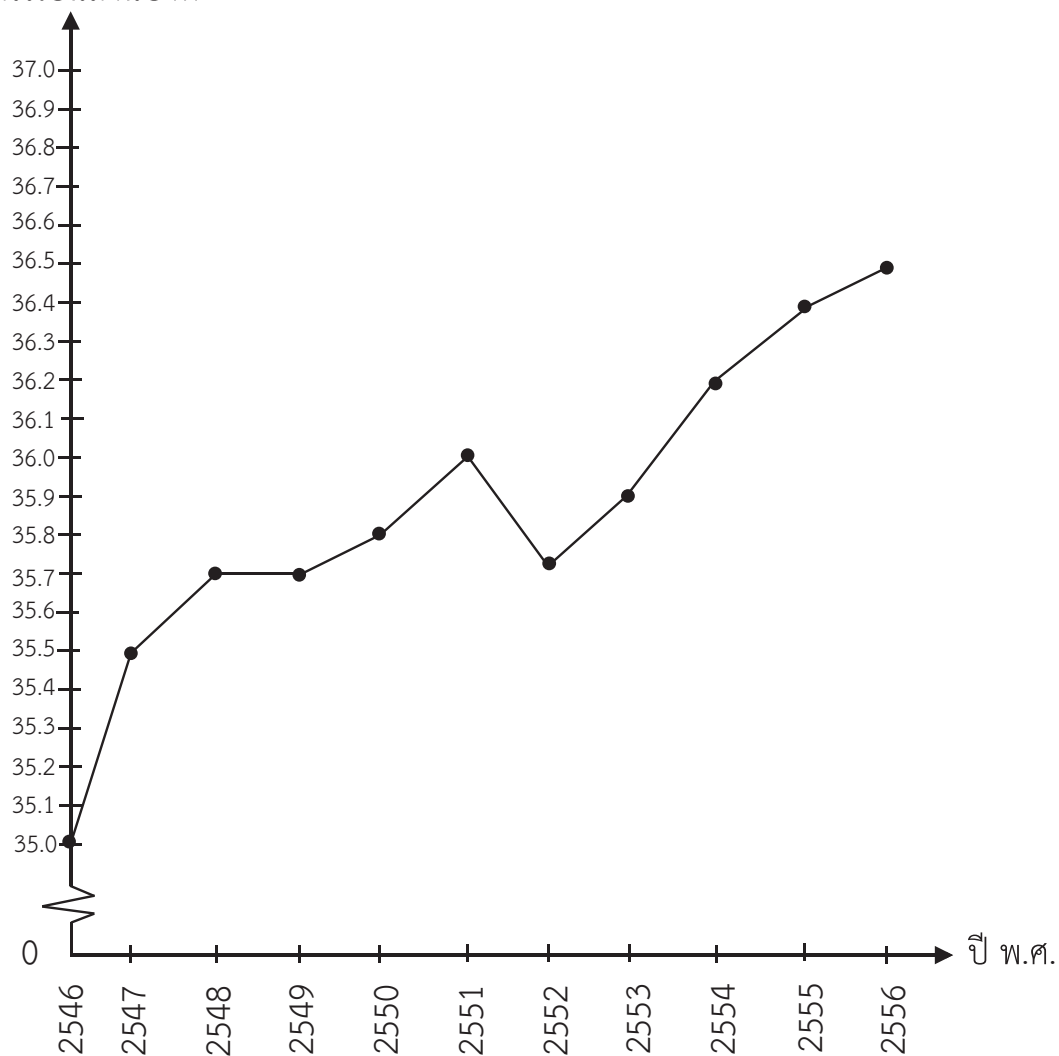
ผลกำไรเป็นล้านบาท



รูปที่ 1



ผลกำไรเป็นล้านบาท



รูปที่ 2



คำถาม การนำเสนอข้อมูลในรูปที่ 1 และรูปที่ 2 รูปใดเป็นการนำเสนอที่เหมาะสมในทางสถิติ และรูปใดเป็นการนำเสนอที่ไม่เหมาะสมทางสถิติ

แนวคิด 1) การนำเสนอข้อมูลในรูปที่ 1 เป็นการนำเสนอที่เหมาะสม เพราะลักษณะของกราฟใกล้เคียงส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกนนอนเป็นการแสดงข้อเท็จจริงให้เห็นเป็นภาพรวมของผลกำไรตั้งแต่ปี พ.ศ. 2546 – พ.ศ. 2556 ว่า ผลกำไรของแต่ละปีเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยเมื่อเทียบกับผลกำไรปีก่อนหน้า คือผลกำไรในช่วง 11 ปี อยู่ระหว่าง 35 ล้านบาทถึง 36.5 ล้านบาท จะเห็นว่า 36.5 ล้านบาทต่างจาก 35 ล้านบาทเพียง 1.5 ล้านบาท หรือเพียง $\frac{1.5}{35} \times 100 \approx 4.3\%$ เท่านั้น ซึ่งถือว่าเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย ยกเว้นผลกำไรของปี พ.ศ. 2552 ลดลงจากผลกำไรปี พ.ศ. 2551 เพียงเล็กน้อย คือจาก 36 ล้าน ลดลงเป็น 35.7 ล้าน หรือ 0.3 ล้านต่อ 36 ล้าน ประมาณ 0.83% และหลังจากปี พ.ศ. 2552 ผลกำไรก็เพิ่มขึ้นเล็กน้อยทุกปีอย่างต่อเนื่องจนถึงปี พ.ศ. 2556

2) การนำเสนอข้อมูลในรูปที่ 2 เป็นการนำเสนอที่ไม่เหมาะสม เพราะกราฟเป็นการนำเสนอข้อมูลที่ไม่ได้แสดงข้อเท็จจริงทั้งหมด คือเสนอเพียงบางส่วนโดยเปรียบเทียบเฉพาะส่วนที่เพิ่มขึ้นของผลกำไรตั้งแต่ 35 ล้าน ถึง 36.5 ล้าน ทำให้กราฟมีลักษณะเพิ่มของผลกำไรแต่ละปีแตกต่างกันมาก ทำให้ผู้อ่านเข้าใจว่าการเปลี่ยนแปลงของผลกำไรของแต่ละปีในช่วง 11 ปี แตกต่างกันมาก และในขณะเดียวกันกราฟก็แสดงให้เห็นว่าการลดลงของผลกำไรปี พ.ศ. 2552 จากปี พ.ศ. 2551 ลดลงเป็นจำนวนมาก ซึ่งแท้จริงลดลงเพียง 0.3 ล้านบาทจาก 36 ล้านบาท หรือประมาณ 0.83% เท่านั้น การนำเสนอข้อมูลในรูปที่ 2 ทำให้ผู้อ่านเข้าใจคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง จึงเป็นการนำเสนอข้อมูลที่ไม่เหมาะสมทางสถิติ



รถยนต์ที่ดีที่สุด



วารสารรถยนต์เล่มหนึ่ง ใช้ระบบการให้คะแนนเพื่อประเมินรถยนต์ใหม่ รถยนต์ที่ได้รับรางวัล “รถยนต์แห่งปี” จะเป็นรถยนต์ที่มีคะแนนรวมสูงสุด มีรถยนต์ใหม่ห้าคันเข้ารับการประเมิน และแสดงผลการประเมินไว้ในตารางดังนี้

รถยนต์	ความปลอดภัย (S)	ประสิทธิภาพ เชื้อเพลิง (F)	รูปลักษณ์ ภายนอก (E)	การประกอบ ภายใน (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

ค่าที่ถูกประเมินตีความดังนี้

3 คะแนน = ดีเยี่ยม

2 คะแนน = ดี

1 คะแนน = พอใช้

คำถามที่ 1 : รถยนต์ที่ดีที่สุด

การคิดคะแนนรวมสำหรับรถยนต์ วารสารรถยนต์เล่มนั้นใช้สูตรการหาคะแนนรวมจากผลรวมของคะแนนแต่ละด้าน ดังนี้

$$\text{คะแนนรวม} = (3 \times S) + F + E + T$$

จงคำนวณหาคะแนนรวมสำหรับ “Ca” แล้วเขียนคำตอบลงในที่ว่างที่กำหนดให้
คะแนนรวมสำหรับ “Ca” :

คะแนนเต็ม

ตอบ 15 คะแนน

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : -

สถานการณ์ : ในเชิงชุมชน

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 79.81

เกาหลี 83.57

ฮ่องกง-จีน 86.64

มาเก๊า-จีน 89.80

ไทย 53.03



คำถามที่ 2 : รถยนต์ที่ดีที่สุด

ผู้ผลิตรถยนต์ “Ca” คิดว่ากฎในการให้คะแนนนั้นไม่ยุติธรรม จึงเขียนสูตรที่ใช้คำนวณการให้คะแนนรวม เพื่อจะให้รถยนต์ “Ca” เป็นผู้ชนะ สูตรที่นักเรียนเขียนขึ้นควรจะต้องรวมตัวแปรทั้งสิ้น และควรเขียนสูตรโดยการเติมจำนวนบวกลงในช่องว่างทั้งสิ้นในสมการข้างล่างนี้

$$\text{คะแนนรวม} = \dots\dots\dots \times S + \dots\dots\dots \times F + \dots\dots\dots \times E + \dots\dots\dots \times T$$

คะแนนเต็ม

คำตอบที่ถูกต้องตามกฎหมาย
เพื่อที่จะให้รถยนต์ “Ca” เป็นผู้ชนะ

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : -

สถานการณ์ : ในเชิงชุมชน

สมรรถนะ : การสะท้อน และสื่อสารทางคณิตศาสตร์

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

ประเทศ	% ตอบถูก
--------	----------

ญี่ปุ่น	44.87
เกาหลี	37.97
ฮ่องกง-จีน	39.78
มาเก๊า-จีน	33.85
ไทย	7.87



การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ของโจทย์ข้อนี้เป็นการให้ข้อมูลการประเมินรถยนต์เพื่อเข้ารับรางวัล โดยพิจารณาจากปัจจัยต่าง ๆ ในที่นี้ประกอบด้วย ความปลอดภัย ประสิทธิภาพ เชื้อเพลิง รูปลักษณ์ภายนอก และการประกอบภายใน เพื่อตัดสินว่ารถยนต์ใดควรจะได้รับรางวัล “รถยนต์แห่งปี” เป็นการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งในปัจจุบันมักมีการประเมินเพื่อให้รางวัลต่าง ๆ เช่น การประเมินคุณภาพหรือประสิทธิภาพผลิตภัณฑ์ของบริษัทต่าง ๆ เพื่อประโยชน์ของผู้บริโภค การประเมินเมืองที่น่าท่องเที่ยว สถานการณ์โจทย์ในลักษณะนี้เป็นเรื่องที่ครูควรให้ความสนใจและต้องฝึกทักษะเหล่านี้ให้กับนักเรียน นอกจากจะทำให้นักเรียนมีทักษะเกี่ยวกับการประเมินผลที่นักเรียนจะพบในชีวิตจริงแล้ว จะทำให้นักเรียนได้เห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์อีกด้วย อีกทั้งนักเรียนได้เรียนรู้ว่าในการพิจารณาสินค้าแต่ละชิ้นที่เราต้องการนั้น จะต้องพิจารณาองค์ประกอบด้านต่าง ๆ เพื่อให้ได้สินค้าที่ตรงกับจุดประสงค์ในการซื้อแต่ละครั้ง และในการใช้ตัวอักษรแทนปัจจัยต่าง ๆ ของสินค้าก็เป็นการนำสัญลักษณ์มาใช้เพื่อให้ได้ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กะทัดรัดและสะดวกต่อการนำไปใช้ในการคำนวณ สำหรับการให้น้ำหนักที่ไม่เท่ากันสำหรับแต่ละปัจจัย เป็นการฝึกการวิเคราะห์ได้ดีมากในการจะพิจารณาว่า ในสถานการณ์หนึ่ง ๆ อาจให้ความสำคัญกับแต่ละปัจจัยแตกต่างกัน เช่น สำหรับผู้ที่มิงบประมาณจำกัด ในการพิจารณาซื้อรถยนต์จะให้น้ำหนักในเรื่องความปลอดภัยและราคาของรถเป็นอันดับต้น ๆ โดยจะเพิ่มน้ำหนักในปัจจัยเหล่านี้มากขึ้น และให้น้ำหนักของปัจจัยเกี่ยวกับความสะดวกสบายหรือรูปลักษณ์ภายนอกลดลง



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ คือ

1. การแทนค่าตัวแปรในสมการ เพื่อคำนวณค่าที่ต้องการ เมื่อโจทย์กำหนดสูตรในการหาคะแนนรวมจากปัจจัย ที่นำมาประเมิน คือ ความปลอดภัย (S) ประสิทธิภาพ เชื้อเพลิง (F) รูปลักษณ์ภายนอก (E) และการประกอบภายใน (T) ดังนี้

$$\text{คะแนนรวม เท่ากับ } (3 \times S) + F + E + T$$

ซึ่งจากสมการข้างต้น จะเห็นว่าการประเมินนี้ให้ความสำคัญที่ความปลอดภัย โดยให้น้ำหนักมากกว่าปัจจัยอื่น 3 เท่า นักเรียนควรจะสามารถหาคะแนนรวมของรถยนต์ยี่ห้อ Ca โดยการแทนค่าตัวแปร คือ แทนค่าของ S, F, E และ T ของ Ca ในสูตร เพื่อจะหาคะแนนรวมที่จะใช้ตอบคำถามที่ 1



2. น้ำหนักของตัวแปร สำหรับคำถามที่ 2 เป็นการสร้างสูตรในการคำนวณใหม่ที่จะทำให้รถยนต์ Ca เป็นผู้ชนะในการประเมิน โดยการเปลี่ยนน้ำหนักของตัวแปรโดยนำจำนวนที่เหมาะสมคูณตัวแปรในสูตร เพื่อให้ได้คะแนนรวมของ Ca มากกว่าคะแนนรวมของรถยนต์อื่น ๆ ซึ่งในการสร้างสูตรใหม่นี้ นักเรียนจะต้องใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนมาช่วยในการวิเคราะห์เพื่อหาน้ำหนักในแต่ละปัจจัย

ในการสร้างสมการที่จะให้ Ca ชนะการประเมิน นักเรียนต้องพิจารณาว่าปัจจัยใดบ้างที่เป็นจุดแข็งหรือจุดเด่นของ Ca ซึ่งในที่นี้ คือ ความปลอดภัย (S) และการประกอบภายใน (T) ทั้งสองปัจจัยนี้ Ca ได้รับประเมินในระดับ 3 หรือ ระดับดีเยี่ยม ดังนั้นเพื่อให้ผลประเมินของรถยนต์ Ca สูงกว่ารถยนต์อื่น ควรให้น้ำหนักกับสองปัจจัยนี้สูงกว่าปัจจัยอื่น ๆ ส่วนจะเป็นเท่าใดนั้น นักเรียนจะต้องใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนพิจารณาเพิ่มน้ำหนักเพื่อจะได้คำตอบได้เร็วขึ้น ซึ่งอาจมีคำตอบหลายคำตอบ แต่ละคำตอบจะต้องมีเหตุผลที่สมเหตุสมผลประกอบในการพิจารณา



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 โจทย์ต้องการหาคะแนนรวมของรถยนต์ Ca

แนวคิด

จากสมการที่โจทย์กำหนด คือ

คะแนนรวม เท่ากับ $(3 \times S) + F + E + T$

โดยที่ S แทน ความปลอดภัย

F แทน ประสิทธิภาพเชื้อเพลิง

E แทน รูปลักษณ์ภายนอก

T แทน การประกอบภายใน

จากสมการที่กำหนดให้น้ำหนัก S เป็น 3 ในขณะที่น้ำหนักของปัจจัยอื่นๆ เป็น 1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผู้ประเมินให้ความสำคัญกับความปลอดภัยมากกว่าปัจจัยอื่นๆ จากตารางผลการประเมิน พบว่า $S = 3$, $F = 1$, $E = 2$ และ $T = 3$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{คะแนนรวมสำหรับ Ca เท่ากับ } & (3 \times 3) + 1 + 2 + 3 \\ & = 15 \text{ คะแนน}\end{aligned}$$



คำถามที่ 2 โจทย์ต้องการหาน้ำหนักของตัวแปร เพื่อให้คะแนนรวมของรถยนต์ Ca

สูงสุด ผู้ผลิตรถยนต์ Ca คิดว่ากฎหรือสมการที่กำหนดในคำถามที่ 1 ให้ คะแนนรวม ไม่ยุติธรรม การพิจารณาหากกฎหรือสมการที่จะทำให้ Ca เป็นรถยนต์ที่ดีที่สุด ควรเพิ่มน้ำหนักของปัจจัยที่ Ca ได้รับผลประโยชน์สูง ซึ่งในที่นี้ คือ ความปลอดภัย (S) และการประกอบภายใน (T) ซึ่งมีผลการประเมิน “ดีเยี่ยม” ได้เท่ากับ 3

แนวคิด พิจารณาตารางผลการประเมิน

รถยนต์	ความ ปลอดภัย (S)	ประสิทธิภาพ เชื้อเพลิง (F)	รูปลักษณะ ภายนอก (E)	การประกอบ ภายใน (T)	คะแนนรวม (3 × S) + F + E + T
Ca	3	1	2	3	15
M2	2	2	2	2	12
Sp	3	1	3	2	15
N1	1	3	3	3	12
KK	3	2	3	2	16

พบว่า จุดอ่อนของ Ca อยู่ที่ปัจจัย F และ E ซึ่งได้ระดับ 1 และ ระดับ 2 ตามลำดับ ขณะที่รถยนต์ KK ซึ่งเมื่อใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนแล้วจะพบว่าเป็นคู่แข่งที่สูสีกัน ซึ่งได้ระดับ 2 และระดับ 3 ตามลำดับ โดยคะแนนส่วนนี้ Ca จะน้อยกว่า KK อยู่ 2 ดังนั้น จะต้องเพิ่มน้ำหนักปัจจัย T ที่ทำให้ได้คะแนนของ Ca เพิ่มขึ้นมากกว่าคะแนนที่เพิ่มของ KK อยู่อย่างน้อย 3 จึงจะมั่นใจได้ว่าคะแนนรวมของรถยนต์ Ca สูงสุด พิจารณาผลการประเมินปัจจัย T ของ Ca และของ KK ซึ่งได้ระดับ 3 และ 2 ตามลำดับ ให้น้ำหนักของปัจจัย T เป็น x

$$\text{ดังนั้น } 3x - 2x \geq 3$$

$$x \geq 3$$

นั่นคือ น้ำหนักของปัจจัย T ควรมากกว่าหรือเท่ากับ 3 จึงจะมั่นใจว่า Ca ได้คะแนนรวมสูงสุด



ดังนั้น สูตรใหม่ของการหาคะแนนรวมคือ

$$\text{คะแนนรวม เท่ากับ } 3S + F + E + xT \text{ เมื่อ } x \geq 3$$

คำตอบ มีหลายคำตอบ เช่น

1. คะแนนรวม เท่ากับ $3S + F + E + 3T$
2. คะแนนรวม เท่ากับ $3S + F + E + 4T$
3. คะแนนรวม เท่ากับ $3S + F + E + 5T$

รายละเอียดดังตารางต่อไปนี้

รายนต์	ความ ปลอดภัย (S)	ประสิทธิภาพ เชื้อเพลิง (F)	รูปลักษณะ ภายนอก (E)	การ ประกอบ ภายใน (T)	คะแนนรวม (3 × S) + F + E + (3 × T)	คะแนนรวม (3 × S) + F + E + (4 × T)	คะแนนรวม (3 × S) + F + E + (5 × T)
Ca	3	1	2	3	21	24	27
M2	2	2	2	2	16	18	20
Sp	3	1	3	2	19	21	23
N1	1	3	3	3	18	21	24
KK	3	2	3	2	20	22	24



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ในการตอบคำถามที่ 1 นักเรียนไทยตอบถูก 53.03 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ซึ่งถือว่าไม่มากเมื่อเทียบกับประเทศอื่น ๆ เนื่องจากเป็นคำถามที่ง่าย เป็นเพียงการแทนค่าตัวแปร ความผิดพลาดที่เกิดขึ้น อาจเกิดจากการอ่านข้อมูลจากตารางผิดพลาด หรือการคำนวณผิดพลาด นอกจากนี้ นักเรียนมักจะคุ้นเคยกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว ซึ่งในโจทย์ข้อนี้มีตัวแปรอิสระ 4 ตัวทำให้นักเรียนอาจจะเกิดการสับสน

สถานการณ์โจทย์ลักษณะนี้เป็นการประยุกต์คณิตศาสตร์ที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน ครูควรยกตัวอย่างที่พบในชีวิตประจำวันที่หลากหลาย เพื่อดึงความสนใจของนักเรียน และให้นักเรียนทำโจทย์ลักษณะนี้มาก ๆ ก็จะทำให้ นักเรียนคุ้นเคยกับโจทย์ในลักษณะนี้มากขึ้น



2. ในการตอบคำถามที่ 2 นักเรียนไทยตอบถูกน้อยมาก เพียง 7.87 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ อาจเป็นเพราะว่านักเรียนไม่คุ้นเคยกับโจทย์ลักษณะนี้ เพราะส่วนใหญ่ นักเรียนจะคุ้นเคยกับโจทย์ที่ใช้การแทนค่า มากกว่าการหาน้ำหนักของตัวแปร การทำโจทย์ลักษณะนี้อาจจะให้นักเรียนทำเป็นกลุ่ม เพราะคำตอบของโจทย์นี้มีหลายคำตอบ ให้นักเรียนอภิปรายถึงเหตุผลของแต่ละคำตอบ นักเรียนจะได้แสดงวิธีคิดวิเคราะห์การให้เหตุผล โดยครูอาจจะสรุปให้นักเรียนเห็นว่าในบางครั้งโจทย์อาจจะมีคำตอบได้หลายคำตอบ และข้อมูลต่าง ๆ ที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน มีความเป็นไปได้ที่เกิดจากการสร้างสูตรหรือสมการ เพื่อให้ประโยชน์กับตัวเอง เป็นการสอนคุณธรรมและจริยธรรมในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วย

ครูสามารถหาโจทย์ในลักษณะที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัวมาเกี่ยวข้องกับการหาผลลัพธ์ที่ต้องการได้ไม่ยากนัก เพราะในชีวิตประจำวันนักเรียนต้องพบกับการที่ต้องตัดสินใจเลือกในสิ่งที่สำคัญที่สุดและสิ่งที่สำคัญรอง ๆ ลงมาในสิ่งที่ต้องการซื้อ หรือแม้แต่ในเรื่องสั่งซื้ออาหาร ครูอาจเริ่มจากสถานการณ์ง่าย ๆ ใกล้ตัวก่อนดังตัวอย่างต่อไปนี้

แก้วไปเที่ยวงานลอยกระทง ซึ่งจัดขึ้นที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย หลังจากที่เธอซื้อของได้ 2 – 3 อย่างที่ต้องการแล้ว เธอก็รู้สึกหิวจึงเข้าไปสั่งซื้อแซนด์วิช แก้วมองดูรายการอาหารและราคา ซึ่งเป็นดังนี้

ขนมปัง 1 คู่ (Bread) ชีส (cheese) แฮม (Ham) และมะเขือเทศและผักกาดหอม 1 ชุด (Vegetables) กำหนดราคาดังนี้

รายการอาหาร	ขนมปัง 1 คู่ B	ชีส 1 แผ่น C	แฮม 1 แผ่น H	มะเขือเทศและผัก 1 ชุด V
ราคา (บาท)	10	15	15	5

จะเห็นว่า แซนด์วิช 1 อัน ตามเมนูปกติ ราคาเท่ากับ $B + C + H + V = 10 + 15 + 15 + 5 = 45$ บาท แก้วชอบทานแซนด์วิชที่มีชีสเยอะ ๆ จึงคิดในใจว่าจะสั่งชีสเพิ่มอีก 1 แผ่น และขอเพิ่มผักอีก 1 ชุด



คำถามที่ 1 แก้วจะต้องจ่ายค่าแซนด์วิชที่สั่งเป็นราคาเท่าไร

แนวคิด เนื่องจาก ราคาของแซนด์วิชเมนูปกติเท่ากับ $B + C + H + V$ บาท
แต่แก้วต้องการเพิ่มชีส 1 แผ่น และเพิ่มผักอีก 1 ชูต ดังนั้น
ราคาแซนด์วิชที่แก้วสั่งเท่ากับ $B + 2C + H + 2V$ บาท

$$= 10 + 2(15) + 15 + 2(5) \text{ บาท}$$

$$= 10 + 30 + 15 + 10 \text{ บาท}$$

$$= 65 \text{ บาท}$$

คำถามที่ 2 ถ้าแก้วต้องการซื้อแซนด์วิชไปฝากน้องสองคนที่บ้านคนละอัน ถ้าแก้วจ่ายเงินเพียง 120 บาท แล้วแก้วจะเลือกซื้อแซนด์วิชแบบใดได้บ้าง

แนวคิด 1. แก้วต้องการซื้อแซนด์วิช 2 อัน โดยจ่ายเงินเพียง 120 บาท
คำตอบที่ง่ายที่สุด คือ ซื้อแซนด์วิชอันหนึ่งเพิ่มชีส อีกอันหนึ่งเพิ่มแฮม ทั้งนี้เพราะว่า
แซนด์วิช 1 อัน ตามเมนูปกติราคา 45 บาท และชีสแผ่นละ 15 บาท ดังนั้นราคารวม
จะเป็น $45 + 15 = 60$ บาท ในทำนองเดียวกันแฮมแผ่นละ 15 บาท เท่ากับราคาของ
ชีส 1 แผ่น จะได้ราคาแซนด์วิชเมื่อเพิ่มแฮม 1 แผ่น เท่ากับ $45 + 15 = 60$ บาท
รวมสองรายการเป็น $60 + 60 = 120$ บาท ซึ่งไม่เกิน 120 บาท แสดงคำตอบได้ดังนี้

ส่วนประกอบ แซนด์วิช น้องคนที่	B	C	H	V	ราคารวม
1	1	2	1	1	$B + 2C + H + V = 10 + 2(15) + 15 + 5$ $= 60$
2	1	1	2	1	$B + C + 2H + V = 10 + 15 + 2(15) + 5$ $= 60$



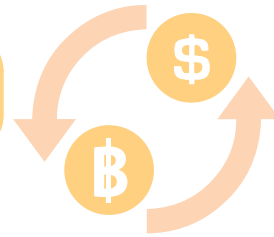
2. ถ้าแก้พบว่าน้องคนหนึ่งชอบแฮมไม่ชอบชีส อีกคนหนึ่งชอบผักและชอบชีสด้วย แชนด์วิชที่แก้วเลือกอาจเป็นดังนี้

ส่วนประกอบ แซนด์วิช น้องคนที่	B	C	H	V	ราคารวม
1	1	-	1	3	$B + 3H = 10 + 3(15)$ $= 55$
2	1	2	1	2	$B + 2C + H + 2V = 10 + 2(15) + 15 + 2(5)$ $= 65$

ส่วนประกอบ แซนด์วิช น้องคนที่	B	C	H	V	ราคารวม
1	1	-	2	2	$B + 2H + 2V = 10 + 2(15) + 2(5)$ $= 10 + 30 + 10$ $= 50$
2	1	2	1	3	$B + 2C + H + 3V = 10 + 2(15) + 15 + 3(5)$ $= 10 + 30 + 15 + 15$ $= 70$

ครูอาจให้นักเรียนอภิปรายหาคำตอบอื่น ๆ ของคำถามที่ 2 ซึ่งราคาแซนด์วิชสองอันไม่เกิน 120 บาท อาจจะเริ่มตั้งแต่ราคาถูกสุดคือใช้เมนูปกติราคาอันละ 45 บาท สองอันราคา 90 บาท แล้วค่อย ๆ เพิ่มส่วนประกอบอื่น ๆ ที่ทำให้ราคาแซนด์วิชสองอันไม่เกิน 120 บาท ซึ่งจะมีคำตอบได้หลายคำตอบ

อัตราแลกเปลี่ยน



เหม่ยหลิงอยู่ในประเทศสิงคโปร์กำลังเตรียมตัวที่จะเดินทางไปอัฟริกาใต้เป็นเวลา 3 เดือน ในฐานะนักเรียนโครงการแลกเปลี่ยน เธอต้องแลกเงินดอลลาร์สิงคโปร์ (SGD) เป็นเงินแรนด์ อัฟริกาใต้ (ZAR)

คำถามที่ 1: อัตราแลกเปลี่ยน

เหม่ยหลิงพบว่าอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างดอลลาร์สิงคโปร์และแรนด์อัฟริกาใต้คือ
 $1 \text{ SGD} = 4.2 \text{ ZAR}$
 เหม่ยหลิงต้องการแลกเงิน 3000 ดอลลาร์สิงคโปร์เป็นแรนด์อัฟริกาใต้ตามอัตรานี้
 เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินแรนด์อัฟริกาใต้ได้เท่าใด
 คำตอบ:

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ
 แขนงวิชา : จำนวน
 สถานการณ์ : ชุมชนท้องถิ่น
 สมรรถนะ : การทำใหม่
 แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

คะแนนเต็ม

ตอบ 12,600 ZAR (ไม่ใส่หน่วยก็ได้)

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	79.08
เกาหลี	80.95
ฮ่องกง-จีน	89.13
มาเก๊า-จีน	92.62
ไทย	59.91

คำถามที่ 2 : อัตราแลกเปลี่ยน

3 เดือนต่อมา เหม่ยหลิงกลับมาสิงคโปร์เหลือเงิน 3,900 ZAR จึงแลกเงินกลับเป็นดอลลาร์สิงคโปร์ แต่อัตราแลกเปลี่ยน คือ
 $1 \text{ SGD} = 4.0 \text{ ZAR}$
 อยากทราบว่า เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินดอลลาร์สิงคโปร์ได้เท่าไร
 คำตอบ :

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ
 แขนงวิชา : จำนวน
 สถานการณ์ : ชุมชนท้องถิ่น
 สมรรถนะ : การทำใหม่
 แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

คะแนนเต็ม

ตอบ 975 SGD (ไม่ใส่หน่วยก็ได้)

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	73.96
เกาหลี	71.95
ฮ่องกง-จีน	88.04
มาเก๊า-จีน	88.89
ไทย	50.33



คำถาม 3 : อัตราแลกเปลี่ยน

ในช่วงเวลา 3 เดือน อัตราแลกเปลี่ยน เปลี่ยนจาก 4.2 เป็น 4.0 ZAR ต่อ SGD
เหม่ยหลิงพอใจหรือไม่ที่อัตราแลกเปลี่ยนในตอนนี้เปลี่ยนเป็น 4.0 ZAR แทน 4.2 ZAR เมื่อเธอแลกเงิน
อัฟริกาใต้กลับคืนเป็นดอลลาร์สิงคโปร์ จงให้คำอธิบายสนับสนุนคำตอบด้วย

.....

.....

คะแนนเต็ม

ตอบว่า“พอใจ” พร้อมคำอธิบายที่ชัดเจนเพียงพอ เช่น

- พอใจ เพราะว่าเมื่ออัตราแลกเปลี่ยนเงินแรนด์อัฟริกาใต้ต่อ 1 ดอลลาร์สิงคโปร์ลดลง เหม่ยหลิงจะได้เงินดอลลาร์สิงคโปร์เพิ่มมากขึ้น
- พอใจถ้าอัตราแลกเปลี่ยน 4.2 ZAR ต่อ 1 ดอลลาร์สิงคโปร์ จะทำให้แลกเงินได้เพียง 929 ZAR
[หมายเหตุ: นักเรียนอาจจะเขียน ZAR แทน SGD แต่การคำนวณ และการเปรียบเทียบทำได้ถูกต้อง จึงไม่ให้ความสำคัญกับหน่วยที่ผิด]
- พอใจ เพราะว่าจากเดิมมี 4.2 ZAR นำไปแลกได้ 1 SGD แต่ขณะนี้ใช้เงินเพียง 4.0 ZAR ก็สามารถแลกได้ 1 SGD
- พอใจ เพราะเธอใช้เงินอัฟริกาใต้น้อยลงไป 0.2 ZAR ต่อเงิน 1 SGD
- พอใจ เพราะเมื่อนำ 4.2 ไปเป็นตัวหารจำนวนเงินที่มี จะได้ผลลัพธ์น้อยกว่านำ 4 ไปหารเป็นตัวหาร
- พอใจ เพราะถ้าอัตราแลกเปลี่ยนไม่ลดลง เธอจะได้รับเงินดอลลาร์สิงคโปร์น้อยลงไปอีกประมาณ 50 เหรียญ

ไม่มีคะแนน

ตอบว่า“พอใจ” แต่ไม่มีคำอธิบาย หรือคำอธิบายไม่เพียงพอ

- พอใจ เพราะอัตราแลกเปลี่ยนที่ลดลงทำให้ได้เงินมากขึ้น
- พอใจ เหม่ยหลิงชอบ เพราะถ้าค่าเงิน ZAR ลดลง แล้วเธอจะได้เงิน SGD มากขึ้น
- พอใจ เหม่ยหลิงพอใจ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปริมาณ

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ชุมชนท้องถิ่น

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบอิสระ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น	42.91
เกาหลี	39.63
ฮ่องกง-จีน	52.75
มาเก๊า-จีน	53.42
ไทย	17.52

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์โจทย์ข้อนี้เป็นเรื่องราวเกี่ยวกับนักเรียนในโครงการแลกเปลี่ยนคนหนึ่งของสิงคโปร์จะเดินทางไปยังแอฟริกาใต้ ต้องการแลกเงินสิงคโปร์ (SGD) เป็นเงินแรนด์ (ZAR) ในอัตรา $1 \text{ SGD} = 4.2 \text{ ZAR}$ และเมื่อเดินทางกลับมาสิงคโปร์มีเงินแรนด์เหลือใช้ จึงแลกจากเงินแรนด์เป็นเงินสิงคโปร์ ในอัตรา $1 \text{ SGD} = 4.0 \text{ ZAR}$ ซึ่งเป็นเรื่องธรรมดาที่การแลกเปลี่ยนเงินตราบางครั้งได้เปรียบ บางครั้งเสียเปรียบขึ้นอยู่กับอัตราแลกเปลี่ยนขณะนั้น นอกจากนี้ อัตราแลกเปลี่ยนที่ซื้อจากธนาคารกับที่ขายคืนธนาคารจะต่างกัน จากสถานการณ์โจทย์ข้อนี้ จะเห็นว่านักเรียนคนนี้ได้เปรียบเทียบในการแลกเงินคืน เพราะสามารถแลกคืนในอัตราที่ต่ำกว่าตอนที่ซื้อมา คือจ่ายเงิน 4.0 ZAR ได้เงินสิงคโปร์ 1 SGD แต่ตอนที่ซื้อมาจ่าย 1 SGD จะได้เงินแอฟริกาใต้ 4.2 ZAR



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนต้องใช้ในการตอบคำถามคือ อัตราส่วนและสัดส่วน หรือใช้วิธีการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ ซึ่งใช้ทักษะการบวก ลบ คูณ และหารจำนวนตรรกยะ ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับหลักการและอัตราการซื้อ – การขายในการแลกเปลี่ยนเงินตราระหว่างประเทศ ซึ่งแนวคิดและตัวอย่างสถานการณ์ที่ใช้เสริมประสบการณ์ พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องนี้นักเรียนสามารถศึกษาได้จากกิจกรรม “ปัญหาการแลกเงิน” ในหนังสือตัวอย่างการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เล่ม 1



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 เหม่ยหลิงพบว่าอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างเงินสิงคโปร์และเงินแรนด์ คือ $1 \text{ SGD} = 4.2 \text{ ZAR}$ เหม่ยหลิงต้องการแลกเงินสิงคโปร์ 3,000 SGD เป็นเงินแรนด์ตามอัตรานี้ เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินแอฟริกาใต้ได้เท่าใด

แนวคิด 1

ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์

เงินสิงคโปร์ 1 SGD แลกเงินแอฟริกาใต้ได้ 4.2 ZAR

เงินสิงคโปร์ 3,000 SGD แลกเงินแอฟริกาใต้ได้ $4.2 \times 3,000 = 12,600 \text{ ZAR}$

ดังนั้น เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินแรนด์แอฟริกาใต้ได้ 12,600 ZAR



แนวคิด 2

ใช้สัดส่วน

ให้เงินสิงคโปร์ 3,000 SGD แลกเงินอัฟริกาใต้ได้ m ZAR

จะได้สัดส่วน $\frac{m}{3,000} = \frac{4.2}{1}$

$$m \times 1 = 3,000 \times 4.2 \quad (\text{ผลคูณไขว้})$$

$$m = 12,600$$

ดังนั้น เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินแรนด์อัฟริกาใต้ได้ 12,600 ZAR



คำถามที่ 2 3 เดือนต่อมา เหม่ยหลิงกลับมาสิงคโปร์ เหลือเงิน 3,900 ZAR จึงแลกเงินกลับเป็นดอลลาร์สิงคโปร์ แต่อัตราแลกเปลี่ยน คือ 1 SGD = 4.0 ZAR อยากทราบว่า เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินสิงคโปร์ได้เท่าไร

แนวคิด 1

ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์

เงินอัฟริกาใต้ 4.0 ZAR แลกเงินสิงคโปร์ได้ 1 SGD

เงินอัฟริกาใต้ 3,900 ZAR แลกเงินสิงคโปร์ได้ $\frac{1 \times 3,900}{4.0} = 975$ SGD

ดังนั้น เหม่ยหลิงจะแลกเป็นเงินดอลลาร์สิงคโปร์ได้ 975 SGD

แนวคิด 2

ใช้สัดส่วน

เงินอัฟริกาใต้ 3,900 ZAR แลกเงินสิงคโปร์ได้ n SGD

ได้สัดส่วน $\frac{n}{3,000} = \frac{1}{4.0}$

$$n \times 4.0 = 3,900 \times 1 \quad (\text{ผลคูณไขว้})$$

$$n = \frac{3,900}{4.0}$$

$$= 975$$

ดังนั้น เหม่ยหลิง จะแลกเป็นเงินดอลลาร์สิงคโปร์ได้ 975 SGD



คำถามที่ 3 ในช่วงเวลา 3 เดือน อัตราแลกเปลี่ยน เปลี่ยนจาก 4.2 เป็น 4.0 ZAR ต่อ SGD เหม่ยหลิงพอใจหรือไม่ที่อัตราแลกเปลี่ยนในตอนนี้เปลี่ยนเป็น 4.0 ZAR แทน 4.2 ZAR เมื่อเธอแลกเงินอัฟริกาใต้กลับคืนเป็นดอลลาร์สิงคโปร์ จงให้คำอธิบายสนับสนุนคำตอบด้วย

แนวคิด การให้เหตุผลประกอบคำตอบของคำถามข้อนี้ สามารถเขียนได้หลากหลาย คำอธิบายส่วนใหญ่อธิบายโดยใช้ความรู้สึกเชิงจำนวน เช่น พอใจ เนื่องจาก 4.0 ZAR น้อยกว่า 4.2 ZAR จึงมีผลทำให้ การแลกเงิน 3,900 อัฟริกาใต้กลับเป็นเงินดอลลาร์สิงคโปร์ โดยใช้อัตรา 4.0 ZAR ต่อ 1 SGD จะแลกเปลี่ยนเป็นเงินดอลลาร์สิงคโปร์ได้มากกว่าใช้อัตรา 4.2 ZAR ต่อ 1 SGD



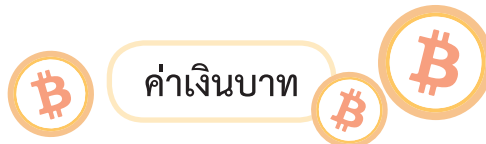
ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. จากหลายแนวคิดที่ให้คะแนนเต็มตามที่เฉลยไว้ในคำถามที่ 3 เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนมาพิจารณา เพื่อตัดสินใจสรุปเป็นคำตอบเกือบทั้งสิ้น ดังนั้นในการเรียนการสอนครูจึงควรให้ความสำคัญกับการแก้ปัญหาที่ต้องใช้ความรู้สึกเชิงจำนวน มาวิเคราะห์หรือพิจารณาประกอบการหาคำตอบ โดยหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่เหมาะสมสอดแทรกในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้มากขึ้น เพื่อให้นักเรียนเกิดความคุ้นเคยในการใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนช่วยแก้ปัญหา และในการฝึกให้นักเรียนเขียนอธิบายเหตุผล ครูควรตระหนักให้นักเรียนเขียนเหตุผลในเชิงคณิตศาสตร์ โดยเน้นความเป็นเหตุเป็นผล หรืออย่างสมเหตุสมผลจึงจะได้คะแนน ดังจะเห็นได้จากแนวเฉลยคำตอบที่ตอบว่า “พอใจ” ซึ่งเป็นคำตอบแรกที่ถูกต้อง แต่การให้เหตุผลยังไม่มีรายละเอียดพอจึงไม่มีคะแนนให้ เช่น ตอบว่า “พอใจ เพราะถ้าค่าเงิน ZAR ลดลงแล้วเธอจะได้เงิน SGD มากขึ้น” เหตุผลดังกล่าวเป็นเหตุผลที่สื่อความหมายไม่ชัดเจน

มีข้อสังเกตว่า เจตนาการให้คะแนนของคำถามข้อนี้ ผู้ให้คะแนนมุ่งเน้นที่การอธิบายเหตุผลมากกว่าคำตอบ “พอใจ” เพียงอย่างเดียว ถ้าครูนำโจทย์และคำถามข้อนี้ไปใช้ในชั้นเรียน อาจแบ่งคะแนนให้ย่อยลงได้ เช่น คำตอบที่สื่อความหมายไม่ชัดเจน ดังข้างต้น อาจให้ได้คะแนนครึ่งหนึ่งของคะแนนเต็ม และตอบเฉพาะคำว่า “พอใจ” อาจให้คะแนนเพียงหนึ่งในสี่ของคะแนนเต็ม ทั้งนี้เพราะว่านักเรียนมีสามัญสำนึกเกี่ยวกับจำนวนแต่ขาดทักษะในการอธิบายให้รายละเอียดประกอบคำตอบอย่างเป็นเหตุเป็นผล โดยเฉพาะนักเรียนไทยที่ตอบคำถามข้อ 3 ได้เพียง 17.52 เปอร์เซนต์ของนักเรียนไทยที่เข้าสอบ อาจเป็นเพราะว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในชั้นเรียนให้ความสำคัญกับการเขียนอธิบายวิธีทำและการให้เหตุผลน้อยเกินไป ส่งผลให้นักเรียนขาดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอซึ่งครูควรนำประเด็นนี้ไปพัฒนาและปรับปรุงการเรียนรู้ของนักเรียนให้มากขึ้น



2. โจทย์ปัญหาในสถานการณ์เกี่ยวกับอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราเป็นเรื่องใกล้ตัวนักเรียน ถือว่าอยู่ในชีวิตประจำวัน ซึ่งเห็นได้จากการเสนอข้อมูลในหนังสือพิมพ์เกือบทุกฉบับและการรายงานข่าวเศรษฐกิจในสื่อออนไลน์ทั่วไป ครูอาจนำโจทย์ลักษณะนี้มาเพิ่มเติมในการจัดการเรียนรู้ เรื่องอัตราส่วน ร้อยละ และอาจสอดแทรกคำถามในเชิงสนทนาหรืออภิปรายให้นักเรียนวิเคราะห์การแลกเปลี่ยนเงินตราที่อัตราแลกเปลี่ยนมีการลดลงหรือเพิ่มขึ้น ว่ามีผลกระทบอย่างไรกับการส่งออกและนำเข้าสินค้าของประเทศได้บ้าง ทั้งนี้เพื่อฝึกให้นักเรียนมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเศรษฐกิจในชีวิตประจำวันมากยิ่งขึ้น เช่น สถานการณ์เกี่ยวกับค่าเงินบาทในช่วงที่เงินบาทแข็ง ธุรกิจนำเข้าจะได้ประโยชน์และธุรกิจส่งออกจะเสียประโยชน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ค่าเงินบาท หมายถึง จำนวนเงินบาทที่นำไปแลกเปลี่ยนกับเงินตราต่างประเทศ หรือที่เรียกว่าเงินสกุลอื่น เช่น ดอลลาร์สหรัฐฯ เยนญี่ปุ่น ปอนด์สเตอร์ลิง ตัวอย่างที่ค่อนข้างคุ้นเคย เช่น การนำเงิน 33 บาท ไปแลกกับดอลลาร์สหรัฐฯ ได้ 1 ดอลลาร์สหรัฐฯ หรือการนำเงิน 30 บาท ไปแลกได้ 100 เยนญี่ปุ่น หรือนำเงิน 63 บาท ไปแลกได้ 1 ปอนด์สเตอร์ลิง

ค่าเงินบาทแข็ง หมายถึง เงินบาทมีค่ามากขึ้นเมื่อเทียบกับเงินสกุลที่กำลังเปรียบเทียบกับอยู่ระหว่างครั้งนี้กับครั้งก่อนหน้า ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่าเงินบาทกับค่าเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐฯ

เมื่อ 3 เดือนก่อน อัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทกับเงินดอลลาร์เป็น 31 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ แต่วันนี้อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 30 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ จะกล่าวว่า ค่าเงินบาทในวันนี้แข็งขึ้นเมื่อเทียบกับ 3 เดือนก่อน แต่ถ้าวันนี้ อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 31.50 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ กล่าวว่า ค่าเงินบาทในวันนี้อ่อนลง เมื่อเทียบกับ 3 เดือนก่อน



คำถามที่ 1 บริษัท ก สั่งซื้อเครื่องจักรชนิดหนึ่งจากบริษัท A ในประเทศสหรัฐอเมริกา จำนวนหนึ่ง เป็นเงิน 80,000 ดอลลาร์ ในวันที่สั่งซื้ออัตราแลกเปลี่ยนเงินคือ 31 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ในวันที่สั่งซื้อ บริษัท ก ประมาณการจ่ายค่าเครื่องจักรให้กับบริษัท A เป็นเงินกี่บาท

2) ถ้าในวันที่ชำระเงิน ค่าเงินบาทแข็งคือ อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 30 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ บริษัท ก ต้องจ่ายเงินกี่บาท

3) ถ้าในวันที่ชำระเงิน ค่าเงินบาทอ่อนคือ อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 32 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ บริษัท ก ต้องจ่ายเงินกี่บาท

4) ระหว่างค่าเงินบาทแข็ง กับค่าเงินบาทอ่อน กรณีใดเป็นผลดีต่อการนำเข้าสินค้าของบริษัท ก มากกว่ากัน เพราะเหตุใด

แนวคิด 1) ในวันที่สั่งซื้อเครื่องจักร บริษัท ก ประมาณการจ่ายเงินให้กับบริษัท A เป็นเงิน $80,000 \times 31 = 2,480,000$ บาท

2) ถ้าค่าเงินบาทแข็ง บริษัท ก ต้องจ่ายเงินให้กับบริษัท A เป็นเงิน $80,000 \times 30 = 2,400,000$ บาท

3) ถ้าค่าเงินบาทอ่อน บริษัท ก ต้องจ่ายเงินให้กับบริษัท A เป็นเงิน $80,000 \times 32 = 2,560,000$ บาท

4) ค่าเงินบาทแข็งจะมีผลดีต่อการนำเข้าสินค้าของบริษัท ก เพราะจะจ่ายเงินซื้อเครื่องจักรน้อยลงกว่าเดิม หรือน้อยกว่าจำนวนเงินที่ประมาณการไว้จากวันที่สั่งซื้อเครื่องจักร ถึง $2,480,000 - 2,400,000 = 80,000$ บาท



คำถามที่ 2

บริษัท ข ส่งออกเสื้อผ้าจำนวนหนึ่งให้กับบริษัท B ในประเทศแคนาดา คิดเป็นเงิน 10,000 ดอลลาร์สหรัฐฯ ในวันที่ได้รับใบสั่งซื้อ อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 31 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์สหรัฐฯ จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) ในวันที่สั่งซื้อ บริษัท ข ประมาณการที่จะได้รับเงินค่าเสื้อผ้าจากบริษัท B เป็นเงินกี่บาท
- 2) ถ้าในวันที่ชำระเงิน ค่าเงินบาทแข็งคือ อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 30 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์สหรัฐฯ บริษัท ข จะได้รับเงินกี่บาท
- 3) ถ้าในวันที่ชำระเงินค่าเงินบาทอ่อนคือ อัตราแลกเปลี่ยนเป็น 32 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์สหรัฐฯ บริษัท ข จะได้รับเงินกี่บาท
- 4) ระหว่างค่าเงินบาทแข็งกับค่าเงินบาทอ่อน กรณีใดเป็นผลดีต่อการส่งออกสินค้าของบริษัท ข มากกว่ากัน เพราะเหตุใด

แนวคิด

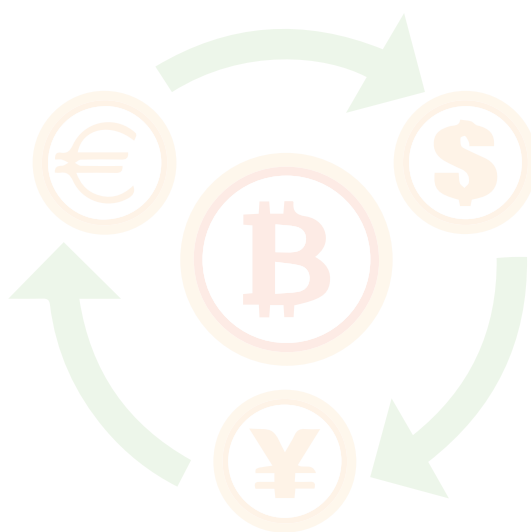
- 1) ในวันที่บริษัท ข ได้รับใบสั่งซื้อเสื้อผ้าจากบริษัท B ประมาณการว่า บริษัท ข จะได้รับเงินจากบริษัท B เป็นเงิน $10,000 \times 31 = 310,000$ บาท
- 2) ถ้าค่าเงินบาทแข็ง บริษัท ข จะได้รับเงินจากบริษัท B เป็นเงิน $10,000 \times 30 = 300,000$ บาท
- 3) ถ้าค่าเงินบาทอ่อน บริษัท ข จะได้รับเงินจากบริษัท B เป็นเงิน $10,000 \times 32 = 320,000$ บาท
- 4) ค่าเงินบาทอ่อนจะมีผลดีต่อการส่งออกของบริษัท ข เพราะจะได้รับเงินจากการขายเสื้อผ้ามากกว่าเดิม หรือมากกว่าจำนวนเงินที่ประมาณการไว้จากวันที่ได้รับ ใบสั่งซื้อ เสื้อผ้าถึง $320,000 - 310,000 = 10,000$ บาท

คำถามที่ 3 กรณีที่ค่าเงินบาทแข็ง หรือ ค่าเงินบาทอ่อน ในธุรกิจการนำเข้าสินค้าและส่งออกสินค้าที่ต้องชำระเงินด้วยเงินต่างประเทศ จะมีฝ่ายใดเปรียบและเสียเปรียบในเวลาเดียวกัน จงเติมคำว่า “ได้เปรียบ” หรือ “เสียเปรียบ” ในตารางต่อไปนี้

ค่าเงินบาท \ ธุรกิจ	การส่งออกสินค้า	ราคารวม
ค่าเงินบาทแข็ง		
ค่าเงินบาทอ่อน		

แนวคิด

ค่าเงินบาท \ ธุรกิจ	การส่งออกสินค้า	ราคารวม
ค่าเงินบาทแข็ง	เสียเปรียบ	ได้เปรียบ
ค่าเงินบาทอ่อน	ได้เปรียบ	เสียเปรียบ

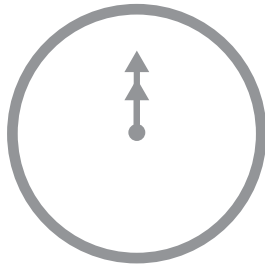




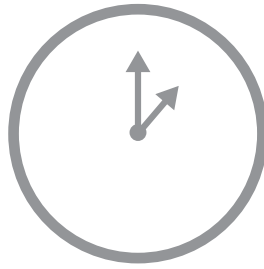
คุยผ่านอินเทอร์เน็ต



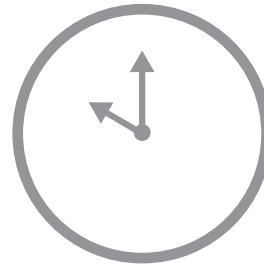
มาร์ค (อยู่ที่เมืองซิดนีย์ ประเทศออสเตรเลีย) และฮานส์ (อยู่ที่กรุงเบอร์ลิน ประเทศเยอรมัน) ติดต่อกัน โดย “คุย” (chat) ทางอินเทอร์เน็ต เขาต้องใช้อินเทอร์เน็ตในเวลาเดียวกัน จึงสามารถ “คุย” กันได้ มาร์ค ดูแผนภาพเวลาของโลก เพื่อหาเวลาที่เหมาะสมในการ “คุย” กันทางอินเทอร์เน็ต และพบว่า



กรีนิช เวลาเที่ยงคืน



เบอร์ลิน เวลาตี 1



ซิดนีย์เวลา 10 โมงเช้า

คำถามที่ 1: คุยผ่านอินเทอร์เน็ต

เวลา 1 ทุ่ม ที่ซิดนีย์ ตรงกับเวลาอะไรที่เบอร์ลิน

คำตอบ:

คะแนนเต็ม

ตอบ 10 โมงเช้า หรือ 10 นาฬิกา

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	61.41
เกาหลี	61.53
ฮ่องกง-จีน	47.24
มาเก๊า-จีน	39.28
ไทย	37.10

คำถามที่ 2 : ค่อยผ่านอินเทอร์เน็ต

มาร์ค และฮานส์ไม่สามารถคุยกันระหว่าง 9 โมงเช้า ถึงบ่าย 4 โมงครึ่ง ในเวลา
ท้องถิ่นของแต่ละคน เนื่องจากพวกเขาต้องไปโรงเรียน เช่นเดียวกันกับในช่วง 5 ทุ่ม ถึง 7
โมงเช้าในเวลาท้องถิ่นของเขาก็คุยไม่ได้เช่นเดียวกัน เพราะกำลังหลับอยู่
จงเขียนเวลาท้องถิ่นลงในตารางที่มาร์คและฮานส์ “คุย” กันได้

สถานที่	เวลา
ซิดนีย์	
เบอร์ลิน	

คะแนนเต็ม

คำตอบบอกเวลา หรือช่วงเวลาใดก็ได้ที่แตกต่างกัน 9 ชั่วโมง และเลือกจากช่วงเวลาเหล่านี้
ซิดนีย์ 16.30 น. – 18.00 น., เบอร์ลิน 7.30 น. – 9.00 น.

หรือ

ซิดนีย์ 7.00 น. – 8.00 น., เบอร์ลิน 22.00 น. – 23.00 น. เช่น

- ซิดนีย์ 17.00 น., เบอร์ลิน 8.00 น.

หมายเหตุ : ถ้าตอบเป็นช่วงเวลา ช่วงเวลานั้นต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ ถ้าไม่กำหนดว่าเป็นเวลาเช้าหรือบ่ายก็ให้
ถือว่าเวลาที่ให้ถูกต้อง ถ้าตอบช่วงเวลาได้ถูกต้อง

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ รวมถึงตอบเวลาในที่หนึ่งที่ถูกต้อง แต่เวลาอีกที่หนึ่งที่ตรงกันไม่ถูกต้อง เช่น

- ซิดนีย์ 8.00 น., เบอร์ลิน 22.00 น.

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : จำนวน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : การสะท้อนการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

แบบของข้อสอบ : ตอบสั้นๆ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 33.00

เกาหลี 28.89

ฮ่องกง-จีน 27.44

มาเก๊า-จีน 16.95

ไทย 8.41

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ของโจทย์ข้อนี้เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลาที่เกิดขึ้นบ่อยในปัจจุบัน ในที่นี้เป็นการคุยติดต่อสื่อสารระหว่างประเทศผ่านระบบอินเทอร์เน็ต สิ่งที่เป็นอุปสรรคคือเวลาท้องถิ่นของแต่ละประเทศต่างกัน เวลาในประเทศที่อยู่ทางตะวันออกจะเร็วกว่าเวลาในประเทศที่อยู่ทางตะวันตก โดยมีเวลามาตรฐานกรีนิชที่ประเทศอังกฤษเป็นหลักในการกำหนดเวลาท้องถิ่นตามเส้นแวง จากนาฬิกาที่โจทย์กำหนด จะพบว่า ถ้าเรียงประเทศทั้งสามจากตะวันออกไปตะวันตก จะเรียงได้ดังนี้ ประเทศออสเตรเลีย (ซิดนีย์) ประเทศเยอรมัน (เบอร์ลิน) และประเทศอังกฤษ (กรีนิช) นักเรียนต้องหาความสัมพันธ์ของเวลาในประเทศต่าง ๆ และหาเวลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด เพื่อตอบคำถามให้ถูกต้อง



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ คือ

1. การอ่านเวลาและการเปรียบเทียบเวลาของประเทศต่าง ๆ ที่อาจจะแตกต่างกัน สิ่งที่ต้องระวังคือเวลาในช่วงที่มีการเปลี่ยนวัน และการเปรียบเทียบเวลาว่าจากเวลาที่โจทย์กำหนดเวลาที่เปรียบเทียบกับ ประเทศใดเร็วกว่าหรือช้ากว่ากัน

2. ความมีวินัยในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาลักษณะนี้ควรยึดที่เมืองใดเมืองหนึ่งเป็นหลัก และจะต้องใช้หลักนี้ตลอดการแก้ปัญหา จึงจะไม่เกิดความสับสน เช่น การเปรียบเทียบเวลาระหว่างซิดนีย์กับเบอร์ลิน ถ้ายึดซิดนีย์เป็นหลัก ก็ให้ใช้ซิดนีย์เป็นหลักตลอด ในทำนองเดียวกันถ้ายึดเบอร์ลินเป็นหลัก ก็ให้ใช้เบอร์ลินตลอด คือ

เวลาที่เบอร์ลิน เท่ากับ เวลาที่ซิดนีย์ – 9 หรือ เวลาที่เบอร์ลินได้จากการหมุนเข็มนาฬิกาทวนกลับไป 9 ชั่วโมง

เวลาที่ซิดนีย์ เท่ากับ เวลาที่เบอร์ลิน + 9 หรือ เวลาที่ซิดนีย์ได้จากการหมุนเข็มนาฬิกาไปข้างหน้า 9 ชั่วโมง





แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

พิจารณาจากโจทย์ที่กำหนดนาฬิกาบอกเวลา ณ ขณะเดียวกัน จะพบว่า สอดคล้องกับสภาวะแวดล้อมของประเทศทั้งสาม โดยจะพบว่า เวลาที่ซิดนีย์เร็วกว่าเวลาที่เบอร์ลิน 9 ชั่วโมงเร็วกว่าเวลาที่กรีนิช 10 ชั่วโมง และเวลาที่เบอร์ลินเร็วกว่าเวลาที่กรีนิช 1 ชั่วโมง



คำถามที่ 1 เวลา 1 พุ่มที่ซิดนีย์ ตรงกับเวลาอะไรที่เบอร์ลิน

แนวคิด

เนื่องจากเวลาที่ซิดนีย์เร็วกว่าเวลาที่เบอร์ลิน 9 ชั่วโมง

ดังนั้น ถ้าเวลาที่ซิดนีย์เป็นเวลา 1 พุ่ม หรือ 19.00 น. เวลาที่เบอร์ลินจะเป็น $19 - 9 = 10.00$ น. หรือ 10 โมงเช้า (โดยหมุนเข็มนาฬิกาทวนกลับไป 9 ชั่วโมง จากเวลา 19.00 น. นาฬิกาจะบอกเวลา 10.00 น. ของวันเดียวกัน)



คำถามที่ 2 มาร์ค และฮานส์ไม่สามารถคุยกันระหว่าง 9 โมงเช้า ถึงบ่าย 4 โมงครึ่ง ในเวลาท้องถิ่นของแต่ละคน เนื่องจากพวกเขาต้องไปโรงเรียน เช่นเดียวกันกับในช่วง 5 พุ่ม ถึง 7 โมงเช้า ในเวลาท้องถิ่นของเขาก็คุยไม่ได้เช่นเดียวกัน เพราะกำลังหลับอยู่ จงเขียนเวลาท้องถิ่นในตารางที่มาร์คและฮานส์ “คุย” กันได้

แนวคิด

1. พิจารณาเวลาที่มาร์คและฮานส์ว่างและไม่ว่างคุยตามเวลาท้องถิ่นของแต่ละคน ดังนี้

เวลานอน	เวลาดึนนอนถึงเวลาไปโรงเรียน	เวลาเรียน	เวลาเลิกเรียนถึงเวลาเข้านอน
23.00 – 7.00 น.	7.00 – 9.00 น.	9.00 – 16.30 น.	16.30 – 23.00 น.

ดังนั้นเวลาที่มาร์คและฮานส์สะดวกคุยคือ 7.00 – 9.00 น. และ 16.30 – 23.00 น. ตามเวลาท้องถิ่นของแต่ละคน

2. ใช้เวลาของมาร์คเป็นหลักเพื่อหาเวลาของฮานส์ที่เบอร์ลินโดยหมุนเข็มนาฬิกาย้อนหลังไป 9 ชั่วโมง จะได้เวลาที่เบอร์ลิน ดังนี้

เวลาที่ซิดนีย์ที่มาร์คอยู่	เวลาที่เบอร์ลินที่ฮานส์อยู่
7.00 – 9.00 น.	22.00 – 24.00 น.
16.30 – 23.00 น.	7.30 – 14.00 น.



3. พิจารณาเวลาที่เบอร์ลินที่มาร์คสะดวกคุยเทียบกับเวลาที่เบอร์ลินซึ่งฮานส์สะดวกคุย ดังนี้

เวลาที่มาร์คสะดวกคุย	7.30 – 14.00 น. และ 22.00 – 24.00 น.
เวลาที่ฮานส์สะดวกคุย	16.30 – 23.00 น. และ 7.00 – 9.00 น.

จะได้ว่า เวลาที่ทั้งมาร์คและฮานส์สะดวกคุยในเวลาที่เบอร์ลินคือ 7.30 – 9.00 น. และ 22.00 – 23.00 น.

4. หาเวลาที่ทั้งมาร์คและฮานส์สะดวกคุยในซิดนีย์ โดยหมุนเข็มนาฬิกาไปข้างหน้า 9 ชั่วโมง จะได้เวลาในซิดนีย์ ดังนี้

เวลาในเบอร์ลิน	เวลาในซิดนีย์
7.30 – 9.00 น.	16.30 – 18.00 น.
22.00 – 23.00 น.	7.00 – 8.00 น.

ดังนั้น เวลาที่มาร์คและฮานส์สามารถคุยกันได้ แสดงในตาราง ดังนี้

เวลาในเบอร์ลิน	เวลาในซิดนีย์
ซิดนีย์	7.00 – 8.00 น. และ 16.30 – 18.00 น.
เบอร์ลิน	22.00 – 23.00 น. และ 7.30 – 9.00 น.



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

สำหรับคำถามที่ 1 การหาคำตอบค่อนข้างตรงไปตรงมา แต่ปรากฏว่านักเรียนไทยตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้องเพียง 37.10 เปอร์เซ็นต์ ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบเท่านั้น เป็นที่น่าสังเกตว่านักเรียนจากประเทศอื่น ๆ ที่กล่าวถึง ก็ตอบคำถามข้อนี้กันได้ไม่มากนัก คือ มีนักเรียนตอบถูกไม่เกิน 61.41 เปอร์เซ็นต์ของนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะเหตุผลต่อไปนี้

1. นักเรียนไม่ได้ฝึกฝนในการทำโจทย์ทำนองนี้ อาจตีความหมายโจทย์ไม่ออก หรือไม่เข้าใจเวลาที่โจทย์กำหนดเป็นรูปหน้าปัดนาฬิกาว่ามีความหมายอย่างไร



2. นักเรียนอาจสับสนเกี่ยวกับเวลาที่เป็นเวลาก่อนเที่ยงวันและหลังเที่ยงวัน เช่น คำถามข้อ 1 ถามว่าเวลา 1 ทุ่มที่ซิดนีย์เป็นเวลาอะไรในเบอร์ลิน นักเรียนอาจตอบว่าเป็นเวลา 4 ทุ่ม แทนที่จะตอบว่า 10 นาฬิกา ก็เป็นไปได้

สำหรับคำถามที่ 2 มีนักเรียนไทยตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้องเพียง 8.41 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบเท่านั้น และนักเรียนจากประเทศอื่น ๆ คือ ญี่ปุ่น เกาหลี จีน – ฮองกง และจีน – มาเก๊า ตอบคำถามข้อนี้ได้ถูกต้อง 33, 28.89, 27.44 และ 16.95 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบ ตามลำดับ ซึ่งถือว่าตอบถูกน้อยมากเมื่อเทียบกับข้อสอบข้ออื่น ๆ จึงแสดงให้เห็นว่าข้อสอบข้อนี้เป็นข้อสอบที่ยากสำหรับนักเรียนทุกกลุ่มที่เข้าสอบ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่า

1. นักเรียนอ่านโจทย์ไม่เข้าใจ เพราะไม่มีประสบการณ์ในการคุยผ่านอินเทอร์เน็ตข้ามประเทศที่มีเวลาท้องถิ่นไม่ตรงกัน

2. เงื่อนไขของโจทย์ค่อนข้างซับซ้อน โดยกำหนดช่วงเวลาที่คุยไม่ได้มากกว่าหนึ่งช่วงเวลา ซึ่งเป็นเวลาเรียนและเวลาเข้านอนของมาร์คและฮานส์ ในการหาคำตอบของคำถามที่ 2 นี้ จะต้องมีการเทียบเวลาในแต่ละช่วงเวลากลับไปกลับมาระหว่างเวลาที่ซิดนีย์และเวลาที่เบอร์ลิน ซึ่งนักเรียนมีโอกาสสับสนและผิดพลาดได้ง่าย

ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 ที่พัฒนาโดย สสวท. เรื่องการวัด ได้มีการให้พื้นความรู้เรื่องเวลาท้องถิ่นในส่วนต่าง ๆ ของโลก มีตัวอย่างและโจทย์ปัญหาอยู่บ้าง แต่ก็ไม่ได้เน้นมาก ตัวอย่างที่ให้ก็เป็นสถานการณ์ที่ไม่ซับซ้อนนัก ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนเรื่องการวัดเวลา ครูอาจเพิ่มเติมแบบฝึกหัดให้นักเรียนได้วิเคราะห์เกี่ยวกับเรื่องนี้อย่างหลากหลายเพราะนอกจากจะเป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงที่เกิดขึ้นเป็นประจำแล้ว นักเรียนยังได้ฝึกการจินตนาการในการหมุนเข็มนาฬิกาตามไปข้างหน้าเท่ากับจำนวนชั่วโมงที่เร็วกว่าหรือหมุนเข็มนาฬิกาย้อนกลับเท่ากับจำนวนชั่วโมงที่ช้ากว่า ซึ่งถ้าไม่ได้ฝึกฝนก็เป็นเรื่องไม่ถนัดนักที่จะหาคำตอบได้ถูกต้องโดยเฉพาะสำหรับสถานการณ์โจทย์ที่ต้องพิจารณาช่วงเวลาหลายช่วงในขณะเดียวกัน

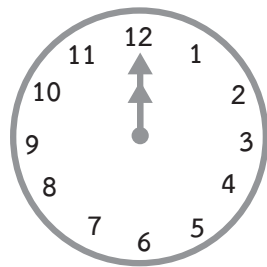
ถ้าจะลดความซับซ้อนของคำถามที่ 2 โจทย์อาจบอกช่วงเวลาที่ทั้งมาร์คและฮานส์สามารถคุยได้ในเวลาท้องถิ่นของตน แล้วให้หาว่าเขาทั้งสองจะมีเวลาว่างตรงกันในช่วงเวลาใดบ้าง หรือถ้าจะให้โจทย์ซับซ้อนมากขึ้น โจทย์อาจกำหนดให้มีการคุยกันของเพื่อนสามคนซึ่งอยู่ในประเทศที่มีเวลาท้องถิ่นแตกต่างกัน



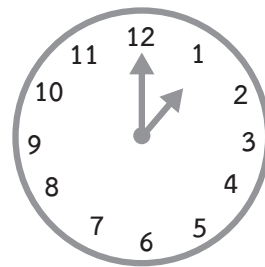
โดยกำหนดช่วงเวลาที่ว่างช่วงเดียวกัน แล้วจึงกำหนดเวลาที่ว่างมากกว่าหนึ่งช่วง หลังจากนั้นโจทย์อาจกำหนดช่วงเวลาที่เขาทั้งสามไม่สามารถคุยกันได้ เพื่อให้หาช่วงเวลาที่เพื่อนทั้งสามคนนี้สามารถคุยกันได้

ในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาในการหาช่วงเวลาที่ต้องการ ครูอาจใช้นาฬิกาเรือนใหญ่มาแสดงการหมุนเข็มนาฬิกาเพื่อหาเวลาที่เปลี่ยนไปตามเวลาท้องถิ่นของแต่ละประเทศ เช่น ถ้าประเทศ A มีเวลาท้องถิ่นช้ากว่าประเทศ B ต้องการหาเวลาในประเทศ A ให้ตรงกับเวลาในประเทศ B ก็ให้หมุนเข็มนาฬิกาไปข้างหน้าเท่ากับจำนวนชั่วโมงที่ช้ากว่า หรือถ้าต้องการหาเวลาท้องถิ่นในประเทศ B ให้ตรงกับเวลาที่ท้องถิ่นในประเทศ A ให้ก็ให้หมุนทวนเข็มนาฬิกาย้อนหลังไปเท่ากับจำนวนชั่วโมงที่เร็วกว่า เมื่อนักเรียนสามารถนึกภาพในจินตนาการ ก็สามารถแก้ปัญหาในสถานการณ์โจทย์ต่าง ๆ ได้โดยง่ายขึ้นและไม่สับสน

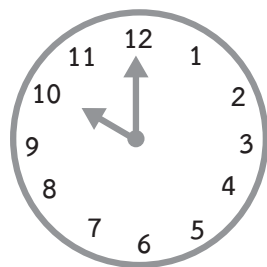
ตัวอย่างสถานการณ์ที่มีการคุยกันสามคนทางอินเทอร์เน็ต ตัวอย่างหนึ่งเป็นดังนี้ มาร์ค อยู่ที่เมืองซิดนีย์ ประเทศออสเตรเลีย ฮานส์อยู่ที่กรุงเบอร์ลิน ประเทศเยอรมัน ทั้งสองเป็นเพื่อนกับโจโจ้ ซึ่งอยู่ที่กรุงเทพฯ โจโจ้ดูแผนภาพเวลาของโลกเพื่อหาเวลาที่เหมาะสมในการคุยกันทางอินเทอร์เน็ตกับเพื่อนทั้งสองในเวลาเดียวกัน พบว่า



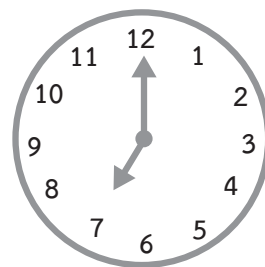
กรีนิช เวลาเที่ยงคืน



เบอร์ลิน เวลาตี 1



ซิดนีย์เวลา 10 โมงเช้า



กรุงเทพฯ เวลา 7 โมงเช้า



คำถาม มาร์ค ฮานส์ และโจโจ้ ต้องไปเรียนเวลา 9.00 – 16.00 น. ยกเว้นเวลาพักเที่ยง 12.00 – 13.00 น. และจะเข้านอนเวลา 23.00 – 6.00 น. ในเวลาท้องถิ่นของแต่ละคน จงเขียนเวลาท้องถิ่นที่แต่ละคนที่สามารถคุยกันได้ ลงในตารางข้างล่างนี้

สถานที่	เวลา
กรุงเทพฯ	
ซิดนีย์	
เบอร์ลิน	

แนวคิด 1. พิจารณาเวลาที่มาร์ค ฮานส์และโจโจ้ คุยกันไม่ได้และคุยกันได้ตามเวลาท้องถิ่นของแต่ละคนเป็นดังนี้

เวลานอน	เวลาก่อนไปโรงเรียน	เวลาเรียน	เวลาพักเที่ยง	เวลาเรียน
23.00 - 6.00 น.	6.00 - 9.00 น.	9.00 - 12.00 น.	12.00 - 13.00 น.	13.00 - 16.00 น.

ดังนั้น เวลาที่มาร์ค ฮานส์ และโจโจ้ สามารถคุยกันได้ตามเวลาท้องถิ่นของแต่ละคนเป็นดังนี้

เวลาตื่นนอนถึงเวลาไปโรงเรียน	เวลาพักเที่ยง	เวลาเลิกเรียนถึงเวลาเข้านอน
6.00 - 9.00 น.	12.00 - 13.00 น.	16.00 - 23.00 น.

2. ใช้เวลาของโจโจ้ เป็นหลักเพื่อหาเวลาของมาร์คที่ซิดนีย์จากหน้าปัดนาฬิกาที่กำหนดให้ พบว่า เวลาที่ซิดนีย์เร็วกว่าเวลาที่กรุงเทพฯ 3 ชั่วโมง ดังนั้นเวลาที่โจโจ้ว่างคุยตรงกับเวลาที่ซิดนีย์หาได้ ดังนี้

จากเวลาที่กรุงเทพฯ หมุนเข็มนาฬิกาไปข้างหน้า 3 ชั่วโมงจะได้เวลาที่ซิดนีย์ ดังนี้

เวลาที่กรุงเทพฯ ที่โจโจ้อยู่	เวลาที่ซิดนีย์ที่มาร์คอยู่
6.00 – 9.00 น.	9.00 – 12.00 น.
12.00 – 13.00 น.	15.00 – 16.00 น.
16.00 – 23.00 น.	19.00 – 2.00 น.

จะได้ว่า เวลาที่โจโจ้สามารถคุยกับมาร์คได้ในเวลาที่ซิดนีย์ คือ 19.00 – 23.00 น.



3. จากเวลาที่โจโจ้และมาร์คสามารถคุยกันได้ พิจารณาหาเวลาที่ฮานส์สามารถคุยได้ตามเวลาท้องถิ่นของเบอร์ลิน ดังนี้

จากหน้าปัดนาฬิกาที่กำหนดให้ พบว่า เวลาที่ซิดนีย์เร็วกว่าเวลาที่เบอร์ลิน 9 ชั่วโมง ดังนั้น จากเวลาที่ซิดนีย์ หมุนทวนเข็มนาฬิกาย้อนไป 9 ชั่วโมง จะได้เวลาที่เบอร์ลิน ดังนี้

เวลาที่ซิดนีย์	เวลาที่เบอร์ลิน
19.00 – 23.00 น.	10.00 – 14.00 น.

ดังนั้น โจโจ้และมาร์คสามารถคุยกับฮานส์ได้ในเวลาท้องถิ่นของเบอร์ลิน คือ 10.00 – 14.00 น.

4. เทียบเวลาที่เบอร์ลินที่ฮานส์คุยได้กับเวลาที่โจโจ้และมาร์คสามารถคุยได้ ดังนี้

เวลาที่เบอร์ลินที่ฮานส์คุยได้	เวลาที่เบอร์ลินที่มาร์คและโจโจ้คุยได้
6.00 – 9.00 น. 12.00 – 13.00 น. 16.00 – 23.00 น.	10.00 – 14.00 น.

จากตารางข้างต้น พบว่า เวลาที่ทั้งฮานส์ มาร์ค และโจโจ้สามารถคุยกันได้ คือ 12.00 – 13.00 น. เวลาท้องถิ่นที่เบอร์ลิน

5. พิจารณาเพื่อหาว่า 12.00 – 13.00 ที่เบอร์ลินจะเป็นเวลาใดที่กรุงเทพฯ และที่ซิดนีย์ หาได้ดังนี้

จากหน้าปัดนาฬิกา พบว่า เวลาที่กรุงเทพฯ เร็วกว่าเวลาที่เบอร์ลิน 6 ชั่วโมง และเวลาที่ซิดนีย์เร็วกว่าเวลาที่เบอร์ลิน 9 ชั่วโมง

ดังนั้น จะได้เวลาที่กรุงเทพฯ และเวลาที่ซิดนีย์ ดังนี้

เวลาที่เบอร์ลิน	เวลาที่กรุงเทพฯ	เวลาที่ซิดนีย์
12.00 – 13.00 น.	18.00 – 19.00 น.	21.00 – 22.00 น.

ดังนั้น ตารางเวลาที่มาร์ค ฮานส์ และโจโจ้สามารถคุยกันได้พร้อมกัน คือ

สถานที่	เวลาท้องถิ่น
กรุงเทพฯ	18.00 – 19.00 น.
ซิดนีย์	21.00 – 22.00 น.
เบอร์ลิน	12.00 – 13.00 น.

พื้นที่ทวีป

ภาพข้างล่างคือ แผนที่ของทวีปแอนตาร์กติกา



คำถามที่ 1 : คุยผ่านอินเทอร์เน็ต

จงหาค่าโดยประมาณของพื้นที่ของทวีปแอนตาร์กติกา โดยใช้มาตราส่วนในแผนที่อธิบายวิธีการประมาณหาพื้นที่นี้ด้วย (นักเรียนสามารถลากเส้นในแผนที่ที่กำหนดมาให้ได้ถ้ามันจะช่วยให้การประมาณง่ายขึ้น)

คะแนนเต็ม

คำตอบที่มีวิธีการถูกต้องและได้คำตอบถูกต้องด้วย เช่นวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้

- ประมาณการโดยการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1 รูป หรือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป ได้คำตอบพื้นที่ระหว่าง 12,000,000 ตร.กม. ถึง 18,000,000 ตร.กม.
- ประมาณการโดยการวาดรูปวงกลม 1 รูป ได้คำตอบพื้นที่ระหว่าง 12,000,000 ตร.กม. ถึง 18,000,000 ตร.กม.
- ประมาณการโดยการบวกพื้นที่รูปเรขาคณิตหลายๆ รูปเข้าด้วยกัน ได้คำตอบพื้นที่ระหว่าง 12,000,000 ตร.กม. ถึง 18,000,000 ตร.กม.
- ประมาณการโดยใช้วิธีการอื่นที่ถูกต้อง ได้คำตอบพื้นที่ระหว่าง 12,000,000 ตร.กม. และ 18,000,000 ตร.กม.
- คำตอบถูกต้อง (ระหว่าง 12,000,000 ตร.กม. และ 18,000,000 ตร.กม.) แต่ไม่แสดงวิธีทำ

ได้คะแนนบางส่วน

วิธีการถูกต้อง แต่ได้คำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่สมบูรณ์

- ประมาณการโดยการวาดรูปเรขาคณิต 1รูป หรือหลายรูปแต่คำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง หรือ ไม่สมบูรณ์
 - วาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป เอาความยาวของด้านกว้างคูณความยาวของด้านยาว แต่คำตอบมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าประมาณการ (เช่น 18,200,000)
 - วาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป เอาความยาวของด้านกว้างคูณความยาวของด้านยาว แต่จำนวนตัวเลขศูนย์ไม่ถูกต้อง (เช่น $4,000 \times 3,500 = 140,000$)
 - วาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป เอาความยาวของด้านกว้างคูณความยาวของด้านยาว แต่ลืมเปลี่ยนมาตราส่วนเป็นตารางกิโลเมตร (เช่น $12 \text{ ซม.} \times 15 \text{ ซม.} = 180$)
 - วาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป และบอกว่าพื้นที่เท่ากับ $4,000 \text{ กม.} \times 3,500 \text{ กม.}$ แต่ไม่ทำอะไรต่อไป
- หรือ ประมาณการโดยใช้วิธีการอื่นที่ถูกต้อง - แต่คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สมบูรณ์

ไม่มีคะแนน

คำตอบไม่ถูกต้องอื่นๆ (ไม่แสดงวิธีทำ และ คำตอบไม่ถูกต้อง) เช่น

- คำนวณหาความยาวเส้นรอบรูปแทนพื้นที่ เช่น 16,000 กม. ได้จากความยาวรอบรูปแผนที่คือ 16 ครั้ง ของระยะ 1,000 กม.
- 16,000 กม.

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : ปรัชญาและรูปทรง

แขนงวิชา : การวัด

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ

% ตอบถูก

ญี่ปุ่น

23.30

เกาหลี

15.20

ฮ่องกง-จีน

26.70

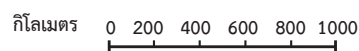
ไทย

2.82



สถานการณ์โจทย์

โจทย์ให้หาค่าโดยประมาณของพื้นที่ของทวีปแอนตาร์กติกา โดยกำหนดแผนที่ของทวีปซึ่งมีลักษณะเว้าแหว่ง ไม่เป็นรูปเรขาคณิตที่สามารถหาพื้นที่ได้โดยง่ายจากสูตรที่นักเรียนคุ้นเคย อีกทั้งมาตราส่วนของแผนที่ที่โจทย์กำหนดมาให้ไม่สะดวกจะนำมาใช้ได้โดยตรง จะต้องทำการเทียบส่วนก่อนนำมาใช้ กล่าวคือ กำหนดความยาว 3 เซนติเมตร แทนระยะทางจริง 1,000 กิโลเมตร โดยมีขีดแบ่งเป็นช่วงๆ 5 ช่วง แต่ละช่วงแทน 200 กิโลเมตร ดังนี้



จะเห็นว่า ถ้านักเรียนจะวัดระยะทางจากมาตราส่วนมาใช้โดยตรง จะไม่สะดวกในการวัดความยาวแต่ละช่วง แต่สามารถทำได้หากใช้การคำนวณหาความยาวของแต่ละช่วงซึ่งเท่ากับ $\frac{3}{5}$ เซนติเมตร หรือ 0.6 เซนติเมตร แต่อย่างไรก็ตามก็ยังคงนำมาใช้ไม่สะดวกอยู่ดี ดังนั้นสถานการณ์โจทย์ข้อนี้ ถ้าดูเผินๆ ก็ไม่น่าจะมีปัญหา แต่เมื่อจะหาค่าโดยประมาณของพื้นที่ของทวีปแอนตาร์กติกาโดยใช้มาตราส่วนที่กำหนด ก็จะมีปัญหาในการนำมาตราส่วนที่กำหนดให้มาใช้หาระยะทางจริงจากการวัดระยะในแผนที่



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนจะต้องมีพื้นฐานความรู้และประสบการณ์ในการประมาณพื้นที่ของรูปที่มีลักษณะต่าง ๆ ที่ไม่สามารถคำนวณหาพื้นที่โดยตรงจากการใช้สูตร ในการประมาณพื้นที่ของรูปที่มีลักษณะเช่นนี้อาจใช้วิธีเขียนรูปเรขาคณิตที่ง่ายต่อการคำนวณพื้นที่ครอบคลุมเนื้อที่ของรูปที่กำหนดให้ โดยพยายามให้ส่วนที่เกินออกนอกรูปกับส่วนที่แหงเข้าข้างในรูปมีเนื้อที่พอ ๆ กัน แล้วคำนวณพื้นที่ของรูปเรขาคณิตนั้นเป็นค่าโดยประมาณของรูปที่ต้องการ รูปเรขาคณิตที่นิยมใช้ในการประมาณพื้นที่ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปวงกลม โดยอาจเป็นรูปเดียวหรือหลายรูปประกอบกันก็ได้

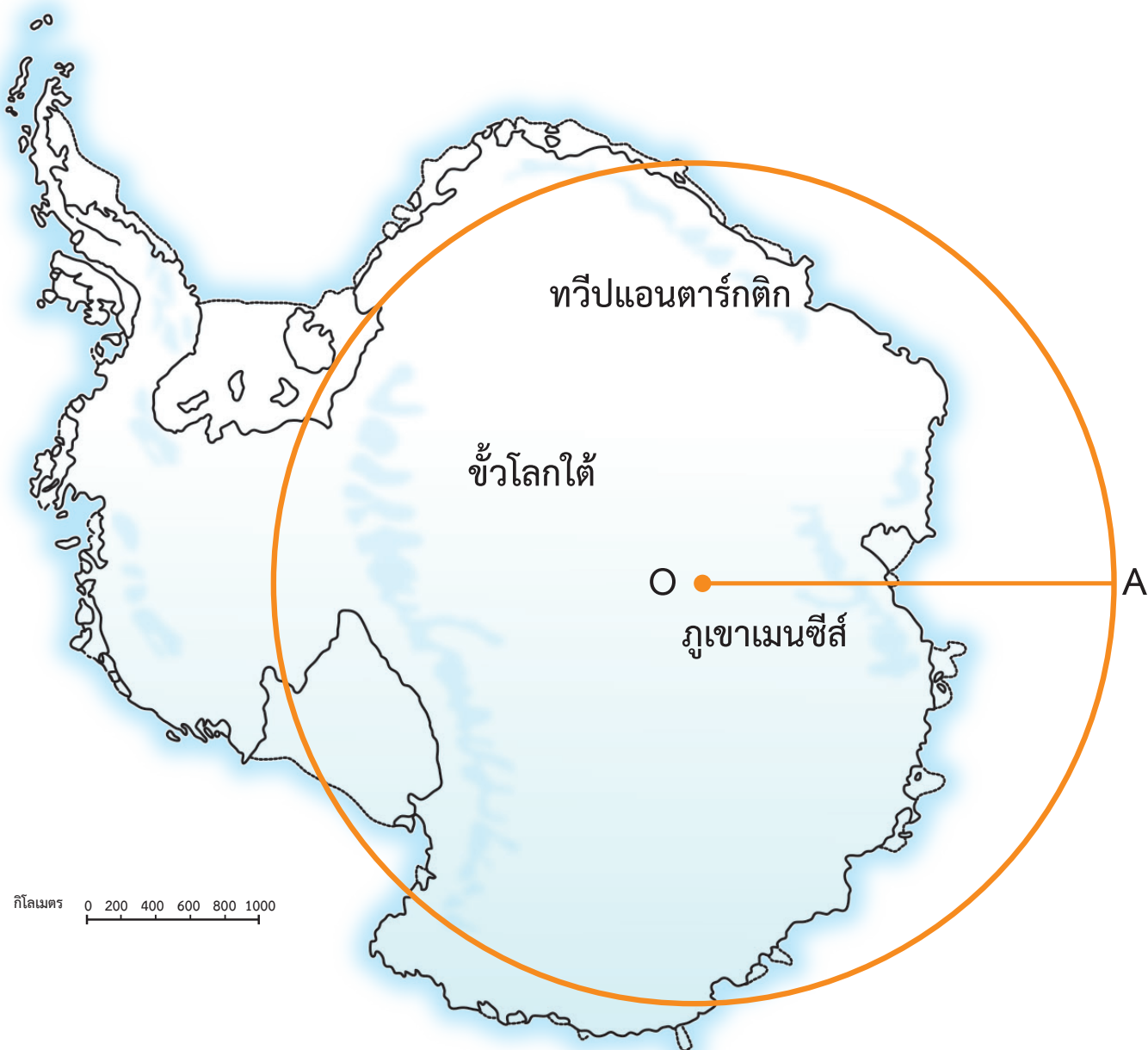


แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1 จงหาค่าโดยประมาณของพื้นที่ของทวีปแอนตาร์กติกา โดยใช้มาตราส่วนในแผนที่อธิบายวิธีการประมาณหาพื้นที่นี้ด้วย (นักเรียนสามารถลากเส้นในแผนที่ที่กำหนดมาให้ได้ ถ้ามันจะช่วยให้การประมาณง่ายขึ้น) ในคำถามข้อนี้ นักเรียนต้องทำสองอย่าง คือ อธิบายวิธีการประมาณหาพื้นที่ของทวีปแอนตาร์กติกา และคำนวณหาค่าโดยประมาณของพื้นที่ของทวีปแอนตาร์กติกา ตามวิธีที่อธิบายมา ซึ่งอาจใช้รูปเรขาคณิตได้หลายแบบ ในที่นี้จะเสนอวิธีหาคำตอบของโจทย์ข้อนี้ 3 แบบ ดังนี้

แนวคิด 1 ใช้การคาดคะเนด้วยสายตาเขียนวงกลมครอบคลุมเนื้อที่ส่วนใหญ่ของแผนที่ โดยประมาณให้ส่วนที่เกินออกนอกวงกลมกับส่วนที่แหงเข้าในวงกลมมีเนื้อที่พอ ๆ กัน ให้วงกลมที่ได้มีรัศมียาว OA ดังรูป



วัดความยาวของ $\overline{OA}$ ได้ยาวประมาณ 6.5 เซนติเมตร

วัดมาตราส่วนที่กำหนดให้ได้ความยาว 3 เซนติเมตร แทนระยะทาง 1,000 กิโลเมตร

ดังนั้น OA แทนระยะทาง $\frac{6.5}{3} \times 1,000 \approx 2,166 \approx 2,200$ กิโลเมตร

นั่นคือ เมื่อเทียบความยาวของรัศมี $\overline{OA}$ กับมาตราส่วนของแผนที่

จะได้ OA แทนระยะทางประมาณ 2,200 กิโลเมตร

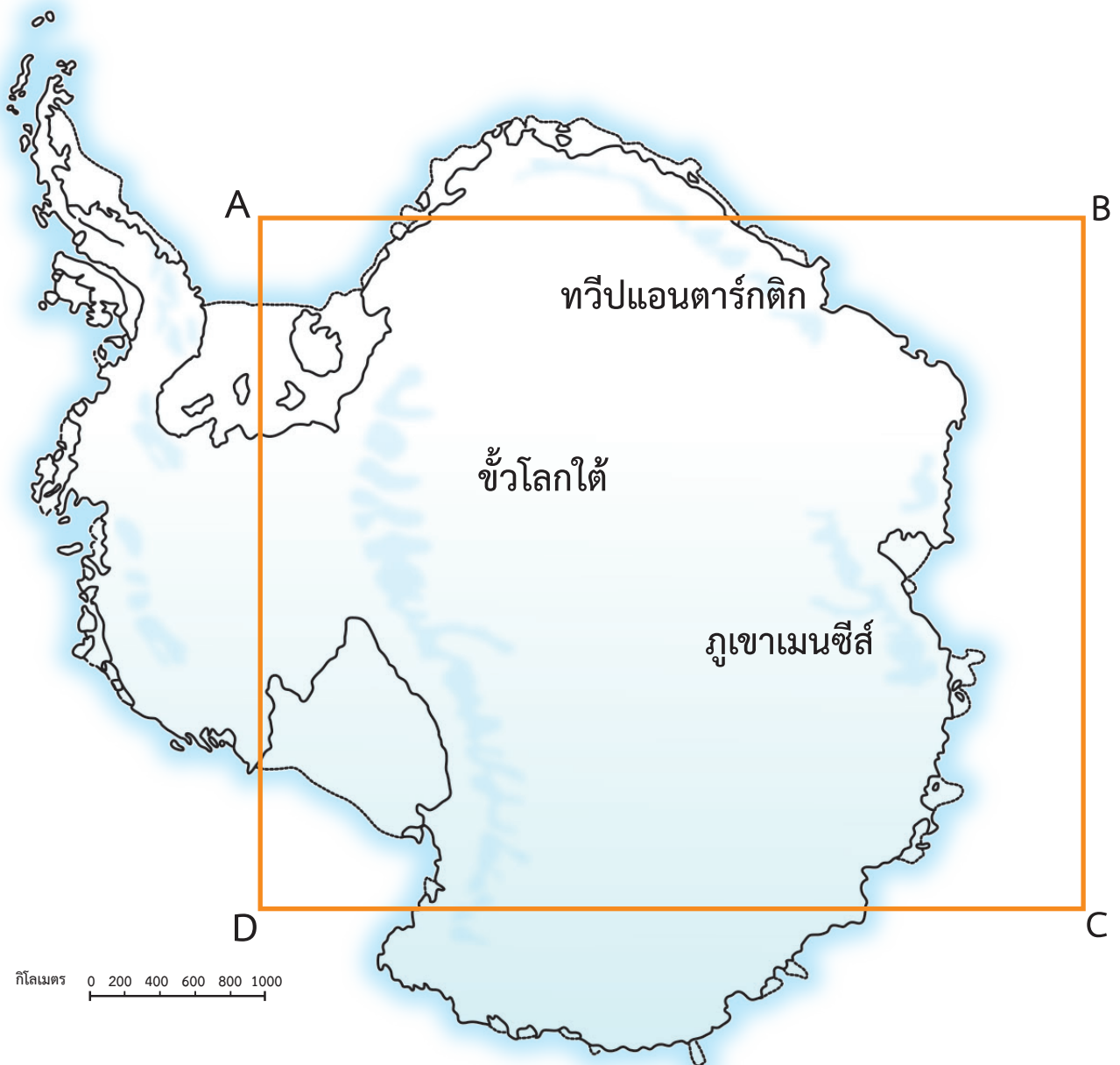
ดังนั้น วงกลมที่ต้องการมีพื้นที่ประมาณ $\pi (OA)^2$ ตารางกิโลเมตร

$$\approx \frac{22}{7} \times 2,200 \times 2,200 \text{ ตารางกิโลเมตร}$$

$$\approx 15,210,000 \text{ ตารางกิโลเมตร}$$

นั่นคือ ทวีปแอนตาร์กติกาที่มีพื้นที่ประมาณ 15,210,000 ตารางกิโลเมตร

แนวคิด 2 ใช้การคาดคะเนด้วยสายตาเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ให้ครอบคลุมเนื้อที่ส่วนใหญ่ของแผนที่ โดยประมาณให้ส่วนที่เกินออกนอกกรอบสี่เหลี่ยมกับส่วนที่แหงงเข้าไปในรูปสี่เหลี่ยมมีเนื้อที่พอ ๆ กัน ดังรูป



วัดความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ได้ $AB \approx 12.5$ เซนติเมตร

และ $BC \approx 10.5$ เซนติเมตร

วัดมาตราส่วนที่กำหนดให้ได้ความยาว 3 เซนติเมตร แทนระยะทาง 1,000 กิโลเมตร

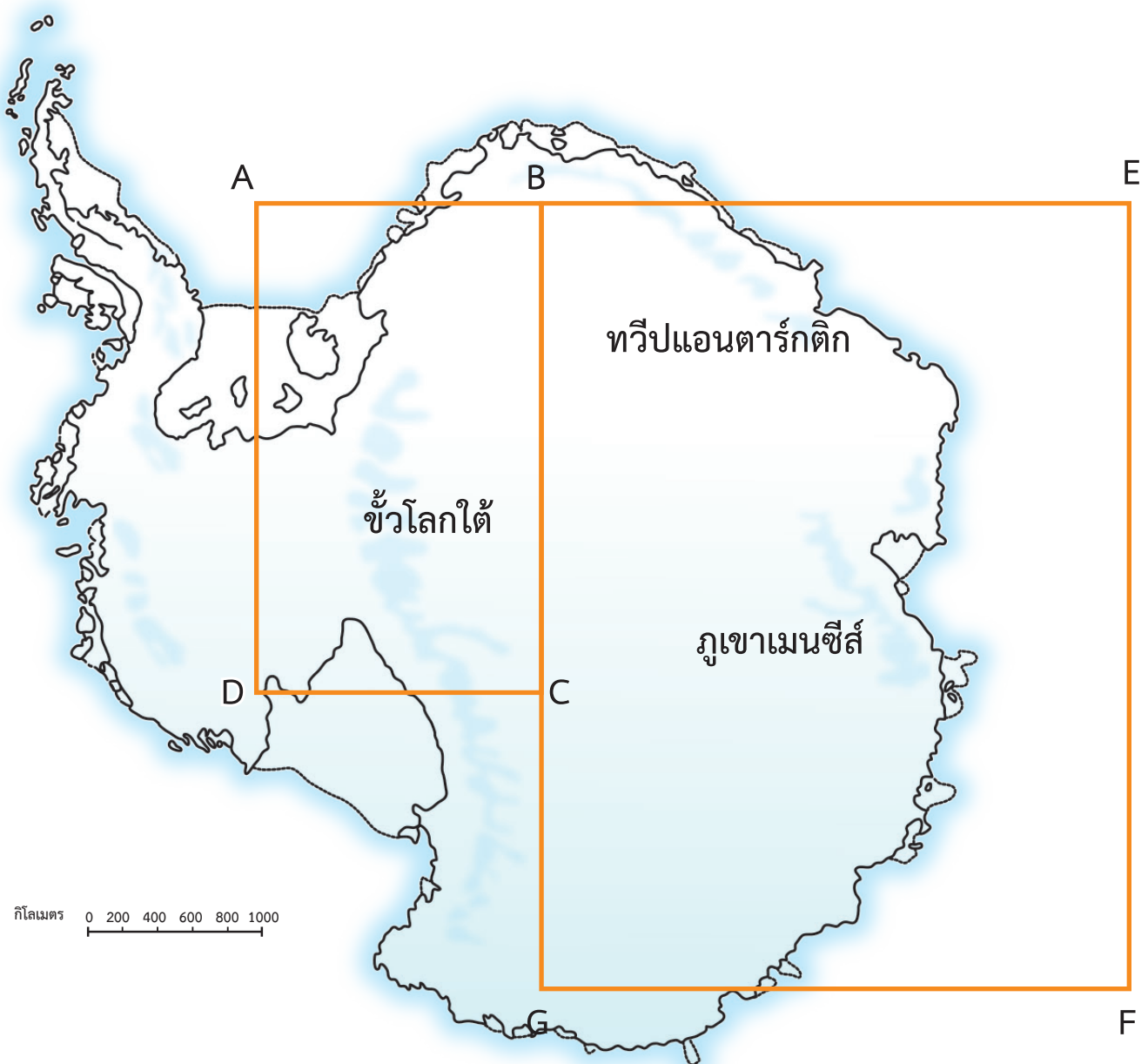
ดังนั้น AB แทนระยะทางประมาณ $\frac{12.5}{3} \times 1,000 \approx 4,200$ กิโลเมตร

BC แทนระยะทางประมาณ $\frac{10.5}{3} \times 1,000 \approx 3,500$ กิโลเมตร

จะได้ $\square ABCD$ มีพื้นที่ประมาณ $4,200 \times 3,500 = 14,700,000$ ตารางกิโลเมตร

ดังนั้น ทวีปแอนตาร์กติกา มีพื้นที่ประมาณ 14,700,000 ตารางกิโลเมตร

แนวคิด 3 ใช้การคาดคะเนด้วยสายตาเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากสองรูปให้ครอบคลุมเนื้อที่ส่วนใหญ่ของแผนที่ โดยประมาณให้ส่วนที่เกินออกนอกรูปสี่เหลี่ยมกับส่วนที่แหงงเข้าไปในรูปสี่เหลี่ยมแต่ละรูปมีเนื้อที่พอๆ กัน ดังรูป



วัดความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ได้ $AB \approx 4.4$ เซนติเมตร

และ $BC \approx 7.5$ เซนติเมตร

วัดความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก BEFG ได้ $BE \approx 9$ เซนติเมตร

และ $EF \approx 12$ เซนติเมตร

วัดมาตราส่วนที่กำหนดให้ได้ความยาว 3 เซนติเมตร แทนระยะทาง 1,000 กิโลเมตร

ดังนั้น AB แทน ระยะทางประมาณ $\frac{4.4 \times 1,000}{3} \approx 1,500$ กิโลเมตร

BC แทน ระยะทางประมาณ $\frac{7.5 \times 1,000}{3} = 2,500$ กิโลเมตร

จะได้ $\square ABCD$ มีพื้นที่ประมาณ $1,500 \times 2,500$ ตารางกิโลเมตร

$$= 3,750,000 \text{ ตารางกิโลเมตร}$$

วัดมาตราส่วนที่กำหนดให้ได้ความยาว 3 เซนติเมตร แทนระยะทาง 1,000 กิโลเมตร

ดังนั้น BE แทน ระยะทางประมาณ $\frac{9 \times 1,000}{3} = 3,000$ กิโลเมตร

EF แทน ระยะทางประมาณ $\frac{12 \times 1,000}{3} = 4,000$ กิโลเมตร

จะได้ $\square BEFG$ มีพื้นที่ประมาณ $3,000 \times 4,000$ ตารางกิโลเมตร

$$= 12,000,000 \text{ ตารางกิโลเมตร}$$

ดังนั้น ทวีปแอนตาร์กติกา มีพื้นที่ประมาณ $3,750,000 + 12,000,000 = 15,750,000$

ตารางกิโลเมตร



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

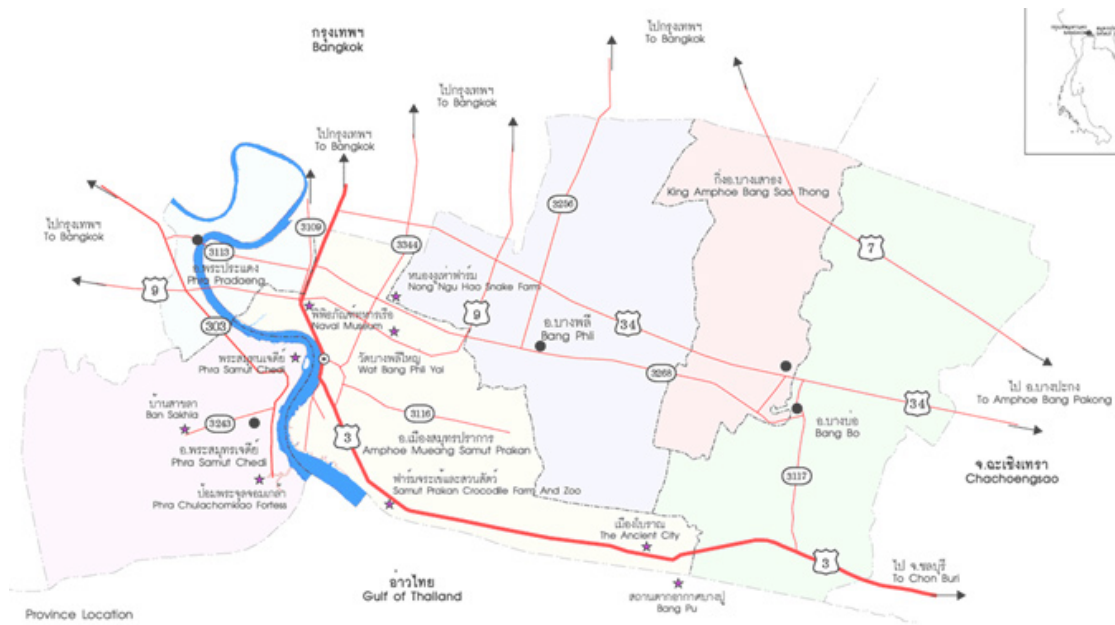
ในการทำโจทย์ข้อนี้ ควรเลือกแนวคิดที่เอื้อต่อการคิดคำนวณ กล่าวคือ ถ้าจะเลือกแนวคิด 1 อาจจะมีปัญหาว่าหาวงเวียนไม่ได้ในขณะนั้น และการคิดคำนวณค่อนข้างซับซ้อน ดังนั้นแนวคิดที่ควรเลือกจึงน่าจะเป็นแนวคิด 2 หรือแนวคิด 3 ในการหาพื้นที่โดยประมาณควรพิจารณาการนำมาตราส่วนที่กำหนดให้มาใช้ให้เหมาะสม จากมาตราส่วนที่กำหนดมาให้ในโจทย์ข้อนี้มีเจตนาจะให้ใช้มาตราส่วน 3 เซนติเมตร แทนระยะทาง 1,000 กิโลเมตร ถ้านักเรียนพยายามใช้มาตราส่วนโดยวัดแต่ละช่วงย่อย ๆ ที่กำหนดมาให้ เพื่อหาว่าระยะทางที่ต้องการเป็นกี่ช่วงย่อย แล้วจึงนำมาคำนวณเพื่อหาระยะทางจริง ก็จะมีปัญหาว่านักเรียนอาจเกิดความท้อใจ เพราะจะมีความยุ่งยากในการหาว่าระยะทางที่ต้องการเป็นกี่ช่วงย่อยในมาตราส่วนที่กำหนดให้

มีนักเรียนไทยทำข้อสอบข้อนี้ได้ถูกต้องเพียง 2.82 เปอร์เซ็นต์ ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ แสดงว่านักเรียนอีกประมาณ 97 เปอร์เซ็นต์ ไม่สามารถทำข้อสอบข้อนี้ได้ ในทำนองเดียวกันนักเรียนจากประเทศญี่ปุ่น เกาหลี และจีน – ฮองกง ต่างก็ทำข้อสอบข้อนี้ได้ถูกต้องไม่เกิน 27 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบแต่ละชาติ ซึ่งเป็นจำนวนเปอร์เซ็นต์น้อยกว่าจำนวนเปอร์เซ็นต์ที่ทำข้อสอบข้ออื่น ๆ ได้ถูกต้อง จึงถือได้ว่าข้อสอบข้อนี้เป็นข้อสอบค่อนข้างยาก และความยากของข้อสอบก็น่าจะเป็นเพราะการกำหนดมาตราส่วนของโจทย์ที่ยากต่อการนำไปใช้ รวมทั้งโจทย์ในลักษณะทำนองนี้ นักเรียนส่วนใหญ่จะไม่ค่อยคุ้นเคยและได้ฝึกทำกันบ่อยนัก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การหาพื้นที่โดยประมาณของแผนที่ ที่กำหนดมาตราส่วนที่ไม่สามารถนำไปใช้ได้ทันทีดังในข้อสอบเรื่องพื้นที่ทวีป ครูควรเพิ่มเติมประสบการณ์ในการทำโจทย์ทำนองนี้ เช่น การให้นักเรียนหาค่าโดยประมาณของพื้นที่ของจังหวัดต่าง ๆ ในประเทศไทยจากแผนที่ที่กำหนดมาตราส่วนที่ต่างไปจากมาตราส่วนที่กำหนดให้โดยทั่ว ๆ ไป ตัวอย่าง จาก 1 : 100,000, 1 : 300,000 หรือ 1 : 15,000 อาจกำหนดมาตราส่วนเสียใหม่ เป็น 3 : 100,000 หรือ 3 : 80,000 ดังตัวอย่างโจทย์ต่อไปนี้



พื้นที่จังหวัดสมุทรปราการ

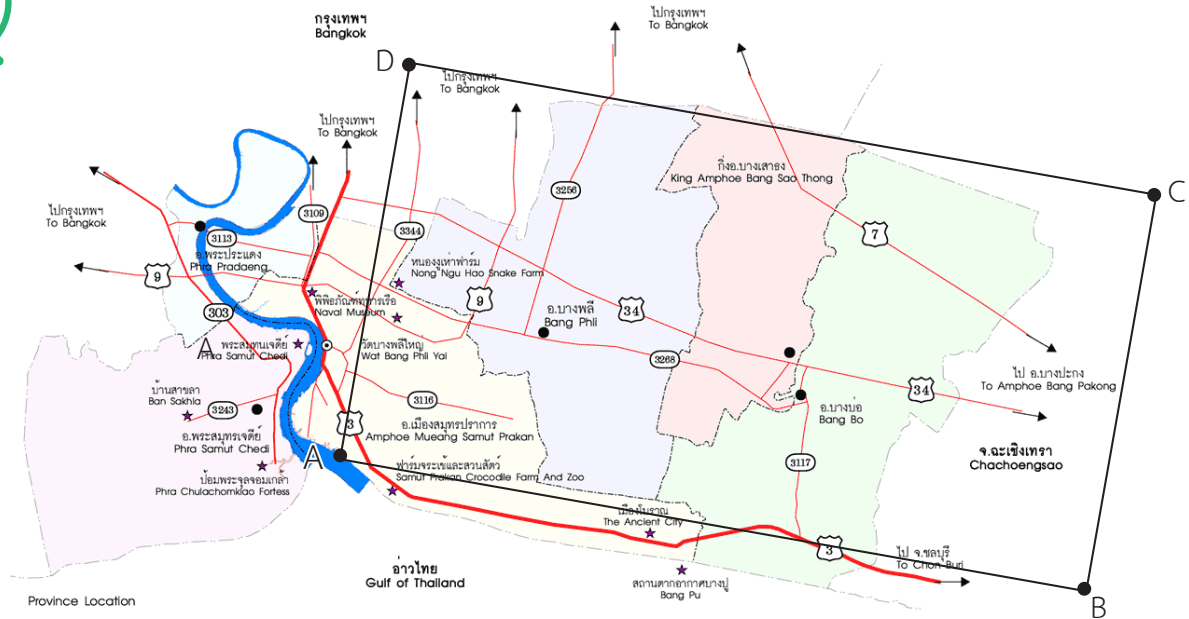
ภาพข้างล่างคือแผนที่ของจังหวัดสมุทรปราการ



มาตราส่วน 2.5 : 1,100,000

คำถาม จงหาพื้นที่โดยประมาณของจังหวัดสมุทรปราการ โดยใช้มาตราส่วนในแผนที่และอธิบายวิธีการหาพื้นที่โดยประมาณด้วย นักเรียนสามารถลากเส้นในแผนที่ที่กำหนดมาให้ได้ ถ้าจะมีส่วนช่วยในการหาคำตอบ

แนวคิด ใช้การคาดคะเนด้วยสายตาเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ให้ครอบคลุมเนื้อที่ส่วนใหญ่ของแผนที่ โดยประมาณให้ส่วนที่เกินออกนอก รูปสี่เหลี่ยมกับส่วนที่แหวกเข้าในรูปสี่เหลี่ยมมีเนื้อที่พอ ๆ กัน ดังรูป



มาตราส่วน 2.5 : 1,100,000

วัดความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ได้ $AB \approx 10$ เซนติเมตร

และ $BC \approx 5.2$ เซนติเมตร

แผนที่กำหนดมาตราส่วน 2.5 : 1,100,000

นั่นคือ วัดระยะบนแผนที่ได้ 2.5 เซนติเมตร ระยะทางจริงเป็น 1,100,000 เซนติเมตร

ดังนั้น AB แทนระยะทางประมาณ $\frac{10 \times 1,100,000}{2.5}$ เซนติเมตร

$$\text{หรือ} \quad \frac{10 \times 11}{2.5} = 44 \text{ กิโลเมตร}$$

BC แทนระยะทางประมาณ $\frac{5.2 \times 1,100,000}{2.5}$ เซนติเมตร

$$\text{หรือ} \quad \frac{5.2 \times 11}{2.5} \approx 22.9 \text{ กิโลเมตร}$$

จะได้ □ ABCD มีพื้นที่ประมาณ $44 \times 22.9 = 1,007.6$ ตารางกิโลเมตร

ดังนั้น จังหวัดสมุทรปราการมีพื้นที่ประมาณ 1,007.6 ตารางกิโลเมตร





หมายเหตุ ที่มาของแผนที่ เป็นแผนที่ท่องเที่ยวจังหวัดสมุทรปราการ ที่ใช้มาตราส่วน 1 : 300,000 เพื่อนำมาเป็นโจทย์ตัวอย่าง ได้ย่อให้แผนที่เล็กลงเล็กน้อยเพื่อใช้มาตราส่วน 2.5 : 1,100,000 และจังหวัดสมุทรปราการมีพื้นที่จริง 1,004 ตารางกิโลเมตร

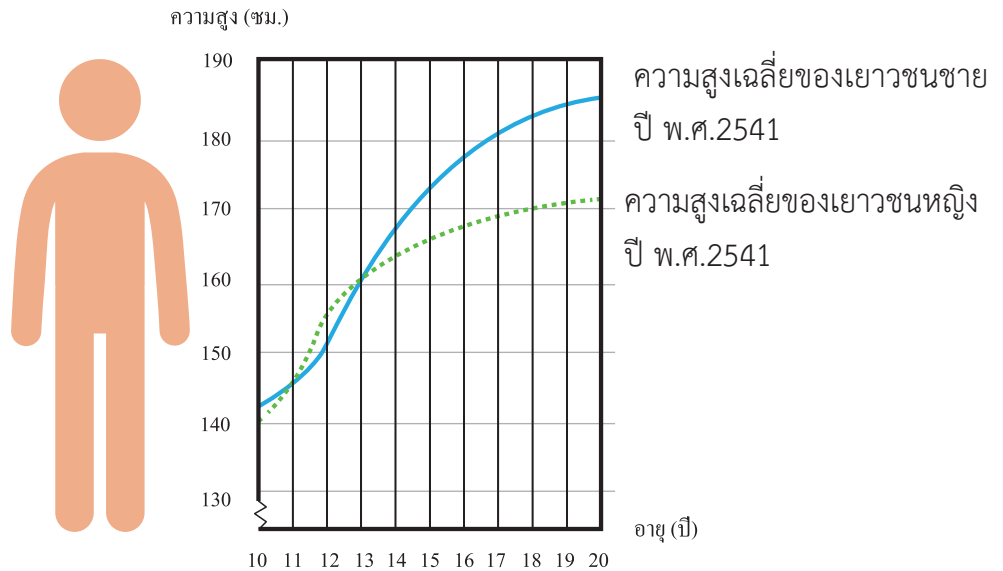
นอกจากในเรื่องการกำหนดมาตราส่วนดังกล่าวข้างต้นแล้ว ในการจัดการเรียนการสอนในเรื่องการวัด ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ฝึกฝนการใช้รูปเรขาคณิตประมาณพื้นที่ของรูปที่กำหนดให้อย่างหลากหลาย โดยให้นักเรียนนำผลของการประมาณพื้นที่มาอภิปรายว่า การประมาณพื้นที่ของใครเหมาะสมพอที่จะใช้ประมาณพื้นที่ได้ดี เพราะเหตุใดและเพื่อทำให้บทเรียนน่าสนใจยิ่งขึ้น ครูอาจเชื่อมโยงการหาพื้นที่โดยประมาณกับวิชาอื่น ๆ เช่น ภูมิศาสตร์และชีววิทยาด้วย

สูงขึ้น



เยาวชนสูงขึ้น

ในปี พ.ศ.2541 ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนชายและหญิงในประเทศเนเธอร์แลนด์แสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



คำถามที่ 1 : สูงขึ้น

ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 ถึงปี พ.ศ. 2541 ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เพิ่มขึ้น 2.3 เซนติเมตรเป็น 170.6 เซนติเมตร อยากทราบว่าความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เมื่อ ปี พ.ศ. 2523 เป็นเท่าไร
คำตอบ: เซนติเมตร

คะแนนเต็ม

ตอบ 168.3 เซนติเมตร (หน่วยให้มาแล้ว)

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์

สมรรถนะ : การทำใหม่

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 46.55

เกาหลี 81.94

ฮ่องกง-จีน 72.98

มาเก๊า-จีน 68.75

ไทย 26.06



คำถามที่ 2 : สูงขึ้น

จากกราฟ โดยเฉลี่ยเยาวชนหญิงอายุเท่าไรจึงจะมีความสูงมากกว่าเยาวชนชายในวัยเดียวกัน

.....

.....

คะแนนเต็ม

บอกช่วงอายุจาก 11 – 13 ปี ได้ถูกต้อง เช่น

- ระหว่างอายุ 11 และ 13 ปี
- จากอายุ 11 ถึง 13 ปี โดยเฉลี่ยเด็กหญิงสูงกว่าเด็กชาย
- 11 – 13

หรือ บอกว่าเด็กหญิงสูงกว่าเด็กชาย เมื่ออายุ 11 และ 12 ปี (ถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องตามภาษาสามัญ เพราะหมายความว่าช่วงอายุ จาก 11 – 13 ปี)

- เด็กหญิงสูงกว่าเด็กชาย เมื่ออายุ 11 และ 12 ปี
- อายุ 11 และ 12 ปี

ได้คะแนนบางส่วน

คำตอบที่เป็นเซตย่อย (subset) ของ (11, 12, 13) ไม่อยู่ในส่วนที่ได้คำตอบถูก เช่น

- 12 ถึง 13
- 12
- 13
- 11
- 11.2 ถึง 12.8

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ เช่น

- ปี พ.ศ. 2541
- เด็กหญิงสูงกว่าเด็กชาย เมื่ออายุมากกว่า 13 ปี
- เด็กหญิงสูงกว่าเด็กชาย จากอายุ 10 ถึง 11 ปี

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์
แขนงวิชา : ฟังก์ชัน
สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์
สมรรถนะ : การทำใหม่
แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบปิด

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	62.71
เกาหลี	71.16
ฮ่องกง-จีน	75.46
มาเก๊า-จีน	70.89
ไทย	42.20

คำถาม 3 : อัตราแลกเปลี่ยน

จงอธิบายว่าลักษณะของกราฟเป็นอย่างไรที่แสดงว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี

.....

.....

คะแนนเต็ม

คำตอบจะต้องกล่าวถึง “การเปลี่ยนแปลง” ของความชันของเส้นกราฟความสูงเฉลี่ยของเด็กหญิง ซึ่งอาจบอกโดยตรง หรือบอกเป็นนัยว่ากราฟมีการเปลี่ยนแปลง ดังนี้

อ้างอิงความชันที่ลดลงของเส้นกราฟ จากอายุ 12 ปีเป็นต้นไป โดยใช้ภาษาในชีวิตประจำวัน ไม่ใช่ภาษาคณิตศาสตร์ เช่น

- เส้นกราฟไม่พุ่งขึ้น แต่จะยืดออกไปทางแนวนอน
- เส้นกราฟยืดออกไป
- เส้นกราฟจะแบนราบ หลังอายุ 12 ปี
- เส้นกราฟของเด็กหญิงเริ่มเป็นแนวราบ แต่เส้นกราฟของเด็กชายสูงขึ้น
- เส้นกราฟเบนออกจากแนวนอน และเส้นกราฟของเด็กชายสูงขึ้นเรื่อยๆ

หรือ อ้างอิงความชันที่ลดลงของเส้นกราฟจากอายุ 12 ปีขึ้นไป โดยใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์

- จะเห็นได้ว่าความชันลดลง
- อัตราของการเปลี่ยนแปลงของกราฟลดลงหลังจาก 12 ปีขึ้นไป
- [นักเรียนหา มุมของเส้นกราฟบนแกน X ก่อนและหลังอายุ 12 ปี]

โดยปกติถ้ามีคำว่า “ความแตกต่าง” หรือ “อัตราการเปลี่ยนแปลง” หรือ “ความชัน” ถือว่าใช้ภาษาคณิตศาสตร์ หรือ เปรียบเทียบการเจริญเติบโตที่เกิดขึ้นจริงก่อนอายุ 12 ปี และหลังอายุ 12 ปี (อาจเปรียบเทียบโดยอ้อมก็ได้)

- จากอายุ 10 ถึง 12 ปี มีการเจริญเติบโตประมาณ 15 ซม. แต่จากอายุ 12 - 20 ปี มีการเจริญเติบโตประมาณ 17 ซม. เท่านั้น
- อัตราการเจริญเติบโตเฉลี่ยจาก 10 ถึง 12 มีประมาณ 7.5 ซม. ต่อปี แต่จากอายุ 12 ถึง 20 ปี จะมีประมาณ 2 ซม. ต่อปี เท่านั้น

ไม่มีคะแนน

นักเรียนบอกว่า ความสูงของเด็กหญิงลดต่ำกว่าความสูงของเด็กชาย แต่ไม่พูดถึงความชันของกราฟเด็กหญิง หรือ ไม่เปรียบเทียบอัตราการเจริญเติบโตของเด็กหญิงก่อนและหลังอายุ 12 ปี เช่น

- เส้นกราฟของหญิงลดต่ำกว่าเส้นกราฟของชาย

ถ้านักเรียนบอกว่ากราฟของหญิงมีความชันลดลงก็ควรให้ถูกได้ ต่างกับ บอกว่าเส้นกราฟของหญิงลดต่ำกว่าเส้นกราฟของชาย เพราะคำถามนี้ไม่ต้องดูการเปรียบเทียบของกราฟระหว่างชายและหญิง จึงไม่ต้องสนใจการอ้างอิงถึงการเปรียบเทียบนั้น ให้ตัดสินจากคำตอบที่เหลือ

หรือ คำตอบอื่นๆ ที่ไม่ถูก เช่น คำตอบที่ไม่อ้างอิงถึงลักษณะของกราฟ เพราะคำถามถามอย่างชัดเจนว่ากราฟแสดงอย่างไร

- เด็กหญิงมีวุฒิภาวะเร็วกว่า
- เพราะว่าเด็กหญิงเข้าสู่วัยรุ่นก่อนเด็กชาย และมีการเจริญเติบโตเร็วกว่า
- เด็กหญิงไม่ค่อยเจริญเติบโตมากนักหลังจากอายุ 12 ปี [บอกว่าการเจริญเติบโตของเด็กหญิงช้าลงหลังจากอายุ 12 ปี แต่ไม่ได้อ้างอิงกราฟ]

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์

สมรรถนะ : การเชื่อมโยง

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

ประเทศ

% ตอบถูก

ญี่ปุ่น

87.90

เกาหลี

86.90

ฮ่องกง-จีน

82.00

ไทย

68.30

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดเป็นการนำเสนอข้อมูลในรูปกราฟเส้นสองเส้น โดยกราฟเส้นแรกแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนชายอายุ 10 ถึง 20 ปี ในปี พ.ศ. 2541 กราฟเส้นที่สองแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 10 ถึง 20 ปี ในปี พ.ศ. 2541 สำหรับคำถามมี 3 ข้อ คำถามข้อแรกมีข้อมูลเพิ่มเติมให้ในคำถามเพื่อใช้ในการหาคำตอบโดยไม่ต้องใช้ข้อมูลที่สถานการณ์โจทย์กำหนดให้ ส่วนคำถามที่สองและคำถามที่สาม การหาคำตอบต้องอาศัยประสบการณ์การเชื่อมโยงความรู้ในการวิเคราะห์กราฟที่กำหนดให้ในสถานการณ์โจทย์



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ ความเข้าใจพื้นฐานทางสถิติในเรื่องข้อมูล การนำเสนอข้อมูลและกราฟในการแก้โจทย์ปัญหานักเรียนต้องมีความสามารถในการอ่านแปลความหมาย และวิเคราะห์ข้อมูลจากการนำเสนอข้อมูลในรูปกราฟเส้น เรานิยมใช้กราฟเส้นแสดงการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลอย่างต่อเนื่อง ตามลำดับก่อนหลังของเวลาที่ข้อมูลนั้น ๆ เกิดขึ้น กราฟเส้นทำให้สังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับข้อมูลได้รวดเร็ว ช่วยให้เห็นแนวโน้มและความสัมพันธ์ต่าง ๆ

นอกจากความรู้ทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจะต้องมีทักษะการใช้ภาษาในการตีความและการแยกแยะประเด็นปัญหา โดยเฉพาะการให้ข้อมูลเพิ่มเติมในคำถามที่ 1 ซึ่งนักเรียนจะต้องหาคำตอบจากข้อมูลที่ให้เพิ่มเติมโดยตรง ส่วนการตอบคำถามที่ 2 และคำถามที่ 3 ก็ต้องอาศัยทักษะการใช้ภาษาในการอธิบายเปรียบเทียบข้อมูลจากการอ่านกราฟและการวิเคราะห์ลักษณะของกราฟ ซึ่งเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านการสื่อสารและการนำเสนอ



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



คำถามที่ 1

ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 ถึงปี พ.ศ. 2541 ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เพิ่มขึ้น 2.3 เซนติเมตร เป็น 170.6 เซนติเมตร อยากทราบว่าความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เมื่อปี พ.ศ. 2523 เป็นเท่าไร



แนวคิด ในคำถามกำหนดว่าตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 ถึงปี พ.ศ.2541 ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เพิ่มขึ้น 2.3 เซนติเมตร เป็น 170.6 เซนติเมตร แสดงว่า

1) ในปี พ.ศ. 2541 ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี คือ 170.6 เซนติเมตร

2) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 ถึงปี พ.ศ. 2541 เยาวชนหญิงอายุ 20 ปี มีความสูงเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 2.3 เซนติเมตร

โจทย์ต้องการทราบว่า ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เมื่อปี พ.ศ. 2523 เป็นเท่าไร

จะเห็นว่าจากข้อมูลที่กำหนดในคำถาม สามารถหาคำตอบได้โดยไม่ต้องอาศัยการอ่านจากกราฟ นั่นคือ ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ 20 ปี เมื่อปี พ.ศ. 2523 เท่ากับ $170.6 - 2.3 = 168.3$ เซนติเมตร

? คำถามที่ 2 จากกราฟ โดยเฉลี่ยเยาวชนหญิงอายุเท่าไรจึงจะมีความสูงมากกว่าเยาวชนชายในวัยเดียวกัน

แนวคิด เป็นคำถามที่ต้องใช้ข้อมูลจากการอ่านและแปลความหมายของข้อมูลจากกราฟที่กำหนดให้ในการตอบคำถาม ดังนี้

1. กราฟเส้นทึบแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนชายในช่วงอายุ 10 ถึง 20 ปี ในปี พ.ศ. 2541

2. กราฟเส้นประแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงในช่วงอายุ 10 ถึง 20 ปี ในปี พ.ศ. 2541

โจทย์ต้องการทราบว่า โดยเฉลี่ยเยาวชนหญิงอายุเท่าไร จึงจะมีความสูงมากกว่าเยาวชนชายในวัยเดียวกัน

จากกราฟเส้นที่กำหนดให้ เมื่อพิจารณาความสูงเฉลี่ยของเยาวชนชายและเยาวชนหญิงในช่วงอายุ 10 ถึง 20 ปี จะเห็นได้ว่ากราฟความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอยู่เหนือกราฟความสูงเฉลี่ยของเยาวชนชาย ในช่วงอายุระหว่าง 11 ถึง 13 ปี ดังนั้นความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงมากกว่าของเยาวชนชายในช่วงอายุระหว่าง 11 ถึง 13 ปี



คำถามที่ 3

จงอธิบายว่าลักษณะของกราฟเป็นอย่างไรที่แสดงว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี

แนวคิด เป็นคำถามที่ต้องใช้ข้อมูลจากการอ่าน แปลความหมายและวิเคราะห์ข้อมูลจากกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงในช่วงอายุ 10 ถึง 20 ปี ในปี พ.ศ. 2541

โจทย์ต้องการให้อธิบายว่า ลักษณะของกราฟเป็นอย่างไรที่แสดงว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี ซึ่งสามารถอธิบายได้ ดังนี้

แนวคิด 1 ลักษณะของกราฟที่แสดงว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี คือ กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิง หลังจากอายุ 12 ปี มีความลาดเอียงเข้าใกล้แนวนอนมากกว่าช่วงอายุก่อน 12 ปี

แนวคิด 2 ลักษณะของกราฟที่แสดงว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี คือ กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงหลังจากอายุ 12 ปี มีความชันค่อย ๆ ลดลงเมื่อเทียบกับความชันในช่วงอายุก่อน 12 ปี

แนวคิด 3 ลักษณะของกราฟที่แสดงว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี คือ การลดลงของอัตราการเปลี่ยนแปลงของกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงหลังจากอายุ 12 ปี ซึ่งหาได้จากการเปรียบเทียบอัตราการเพิ่มขึ้นของความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุระหว่าง 10 – 12 ปี กับอัตราการเพิ่มขึ้นของความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุระหว่าง 12 – 20 ปี ดังนี้

จากกราฟ

เยาวชนหญิงอายุ 10 ปี มีความสูงประมาณ 141 เซนติเมตร

เยาวชนหญิงอายุ 12 ปี มีความสูงประมาณ 156 เซนติเมตร

เยาวชนหญิงอายุ 20 ปี มีความสูงประมาณ 173 เซนติเมตร

ดังนั้น เยาวชนหญิงอายุ 10 – 12 ปี มีความสูงเฉลี่ยเพิ่มขึ้นประมาณ

$156 - 141 = 15$ เซนติเมตร แสดงว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุ

ระหว่าง 10 ถึง 12 ปี ประมาณ $\frac{15}{2} = 7.5$ เซนติเมตรต่อปี และเยาวชนหญิงอายุ 12 – 20 ปี

มีความสูงเฉลี่ยเพิ่มขึ้นประมาณ $173 - 156 = 17$ เซนติเมตร แสดงว่าอัตราการเพิ่มขึ้นของ

ความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอายุระหว่าง 12 ถึง 20 ปี ประมาณ $\frac{17}{8} \approx 2$ เซนติเมตรต่อปี

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของกราฟลดลงหลังจาก 12 ปีขึ้นไป



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. นักเรียนไทยตอบคำถามที่ 1 ได้ถูกต้องเพียง 26.05 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ ทั้งที่ข้อความในคำถามได้ให้ข้อมูลมาเพียงพอที่จะหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้เรื่องการลบของจำนวนเท่านั้น ทั้งนี้อาจเป็นเพราะลักษณะของสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดกราฟเส้นมาให้ นักเรียนจึงมุ่งที่จะหาคำตอบจากกราฟโดยไม่ได้พิจารณาข้อมูลที่ให้มาในคำถามให้ชัดเจน เมื่อไม่สามารถหาคำตอบได้จากการอ่านกราฟ ประกอบกับการมีทักษะการอ่านที่ไม่ดีพอ ทำให้ไม่สามารถตีความและแยกแยะข้อมูลที่ให้มาในคำถามจึงหาคำตอบไม่ได้ นอกจากนี้นักเรียนอาจขาดประสบการณ์การแก้โจทย์ปัญหาที่กำหนดข้อมูลเพิ่มเติมไว้ในคำถามโดยไม่ต้องใช้ข้อมูลในสถานการณ์โจทย์ จึงไม่ได้พิจารณาประเด็นปัญหาและข้อมูลในคำถามให้ชัดเจน

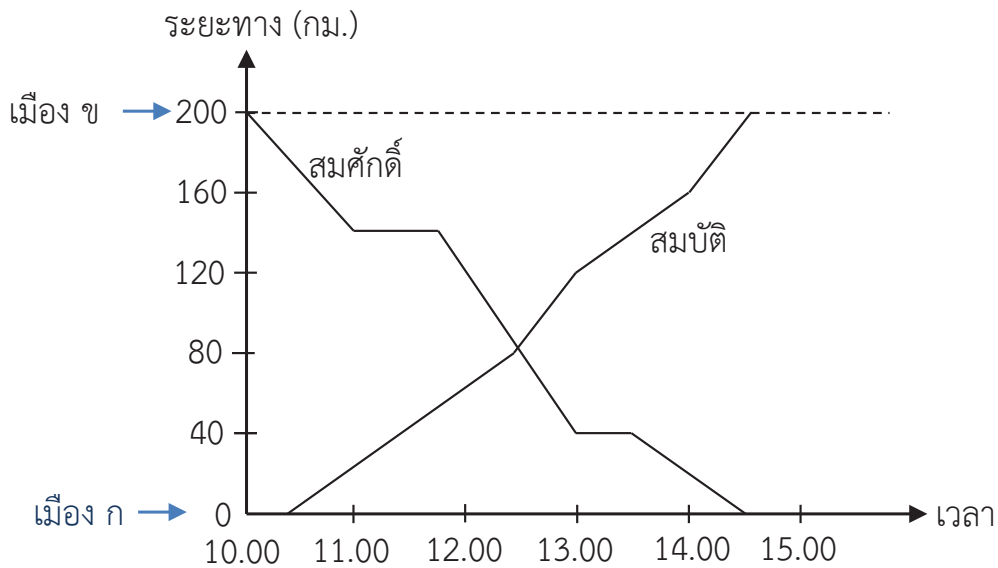
2. การหาคำตอบสำหรับคำถามที่ 2 ใช้การสังเกตช่วงที่เส้นกราฟความสูงเฉลี่ยของเยาวชนหญิงอยู่เหนือเส้นกราฟความสูงเฉลี่ยของเยาวชนชาย ซึ่งอยู่ในช่วงอายุ 11 – 13 ปี แต่คำตอบของนักเรียนบางคนไม่ครอบคลุมช่วงอายุดังกล่าว ทำให้ได้คะแนนเพียงบางส่วน เช่น ตอบช่วงอายุ 11.2 ถึง 12.8 ปี, 12 ถึง 13 ปี หรือไม่ตอบเป็นช่วงอายุ เช่น ตอบว่าอายุ 11 ปี 12 ปี หรือ 13 ปี ครูจึงควรเน้นย้ำให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องความครบถ้วนของคำตอบ ถึงแม้ว่าลักษณะคำถามดูเหมือนจะมีคำตอบเดียวก็ตาม

3. เนื่องจากแนวคิดในการตอบคำถามที่ 3 ที่ให้อธิบายลักษณะของกราฟเกี่ยวกับอัตราการเพิ่มขึ้นของการเจริญเติบโตโดยเฉลี่ยของเยาวชนหญิงลดลงหลังจากอายุ 12 ปี มีได้หลายแนวคิดเพื่อให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในห้องเรียน ครูผู้สอนควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เสนอแนวคิดในการหาคำตอบ และช่วยกันพิจารณาว่าควรเลือกใช้แนวคิดใดในการตอบคำถาม เพราะเหตุใด ซึ่งนักเรียนบางคนอาจเลือกใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิหรือความชัน ด้วยวิธีสังเกตจากกราฟเส้นโดยตรง ซึ่งอาจเห็นได้ง่ายในกรณีที่เส้นกราฟมีการเปลี่ยนแปลงให้เห็นอย่างชัดเจน ดังปรากฏในโจทย์ที่ให้มา ถึงแม้ว่านักเรียนจะไม่คุ้นเคยเกี่ยวกับความชันของเส้นกราฟ แต่ก็เปรียบเทียบกับความหมายของความชันที่ใช้กันโดยทั่วไปในชีวิตจริง เช่น ความชันของบันได หรือความชันของภูเขา เป็นต้น สำหรับแนวคิด 3 เป็นการเพิ่มมุมมองในการแก้ปัญหา โดยขยายความรู้ไปสู่เรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงของกราฟทั้งนี้การจัดการเรียนรู้ในลักษณะดังกล่าว จะช่วยเสริมสร้างทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนได้หลายด้านคือ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารและการนำเสนอ การเชื่อมโยง ความรู้ทางคณิตศาสตร์ และการมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์



เพื่อให้ นักเรียนมีประสบการณ์ในการอ่านและแปลความหมายจากกราฟให้มากขึ้น ครูผู้สอนควรหาแบบฝึกหัดเพิ่มเติมเกี่ยวกับกราฟในลักษณะต่าง ๆ มาให้นักเรียนได้อ่าน และแปลความหมายในสถานการณ์ที่หลากหลาย ดังตัวอย่าง เช่น

สมบัติเดินทางจากเมือง ก ไปเมือง ข และสมศักดิ์เดินทางจากเมือง ข ไปเมือง ก โดยใช้เส้นทางเดียวกัน การเดินทางของคนทั้งสองแสดงได้ด้วยกราฟดังต่อไปนี้



คำถาม

1. เมือง ก และเมือง ข อยู่ห่างกันกี่กิโลเมตร
2. สมบัติและสมศักดิ์สวนทางกันเมื่อเวลาใด และจุดที่สวนทางกันอยู่ห่างจากเมือง ก กี่กิโลเมตร
3. ในการเดินทางของสมบัติและสมศักดิ์ มีใครแวะระหว่างทางบ้าง และถ้ามีการแวะระหว่างทาง มีการแวะกี่ครั้ง แต่แต่ละครั้งใช้เวลานานเท่าใด
4. สมบัติและสมศักดิ์ ใช้อัตราเร็วในการเดินทางเท่ากันหรือไม่ (ไม่รวมเวลาหยุดพัก) ถ้าไม่เท่ากัน ใครใช้อัตราเร็วมากกว่า จงอธิบาย
5. ในช่วงเวลา 13.00 น. – 14.30 น. สมบัติใช้อัตราเร็วในการเดินทางเท่าไร

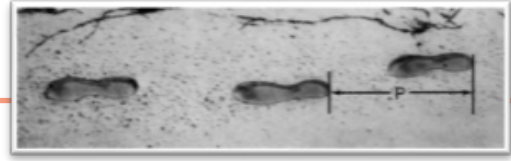


คำตอบ

1. 200 กิโลเมตร
2. 12.30 น. ห่างจากเมือง ก 80 กิโลเมตร
3. สมศักดิ์ แวะระหว่างทาง 2 ครั้ง ครั้งแรกใช้เวลา 45 นาที ครั้งที่สองใช้เวลา 30 นาที แต่สมบัติไม่แวะเลย
4. ไม่เท่ากัน สมศักดิ์ใช้อัตราเร็วมากกว่า เพราะสมศักดิ์ใช้เวลา (ไม่รวมเวลาหยุดพัก) 3 ชั่วโมง 15 นาทีในการเดินทาง 200 กิโลเมตร แต่สมบัติใช้เวลา 4 ชั่วโมงในการเดินทาง 200 กิโลเมตร
5. กิโลเมตร/ชั่วโมง
(อัตราเร็ว $\frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}} = \frac{200 - 120}{1\frac{1}{2}} = 53\frac{1}{3}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง)



รอยเท้า



ในภาพเป็นรอยเท้าของชายคนหนึ่ง

ความยาวของก้าว (P) คือระยะทางจากรอยขอบสันเท้าหนึ่งไปถึงสันเท้าถัดไป

สำหรับผู้ชาย ความสัมพันธ์ n และ P เป็นไปตามสูตร $\frac{n}{P} = 400$ โดยที่

n = จำนวนครั้งของการก้าวในเวลาหนึ่งนาที

P = ความยาวของก้าว (หน่วยเป็นเมตร)

คำถามที่ 1 : รอยเท้า

ถ้าใช้สูตรนี้กับการเดินของสมรักษ์ ผู้ซึ่งก้าวเท้าได้ 70 ครั้งในเวลาหนึ่งนาที ความยาวของก้าว (P) ของสมรักษ์เป็นเท่าไร จงแสดงวิธีทำ

คะแนนเต็ม

ตอบว่า 0.5 m หรือ 50 cm, $\frac{1}{2}$ (ไม่จำเป็นต้องใส่หน่วย)
เช่น

- $70/P = 140$
 $70 = 140P$
 $P = 0.5$
- $70/140$

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

- 70 cm

ได้คะแนนบางส่วน

แทนค่าตัวเลขในสูตรถูกต้อง แต่คำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่มีคำตอบ

- $\frac{70}{P} = 140$ [แทนตัวเลขในสูตรเพียงอย่างเดียว]
- $\frac{70}{P} = 140$
 $70 = 140P$

$P = 2$ [แทนค่าได้ถูกต้อง แต่คำนวณออกมาไม่ถูกต้อง]

หรือ

ใช้สูตร $P = n/140$ ได้ถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำไม่ถูกต้อง

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

ประเทศ

% ตอบถูก

ญี่ปุ่น	40.85
เกาหลี	43.80
ฮ่องกง-จีน	62.21
มาเก๊า-จีน	60.17
ไทย	17.30



คำถามที่ 2 : สูงขึ้น

ภาคภูมิทราบว่ายาวของก้าวของเขาเป็น 0.80 เมตร และสามารถใช้สูตรข้างต้นกับการก้าวเท้าของภาคภูมิจึงแสดงวิธีคำนวณหาอัตราเร็วของการเดินของภาคภูมิเป็นเมตรต่อนาที และเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง

คะแนนเต็ม

คำตอบถูกต้อง (ไม่จำเป็นต้องใส่หน่วย) ทั้งเมตรต่อนาที และ กิโลเมตรต่อชั่วโมง :

$$n = 140 \times 0.80 = 112$$

ในหนึ่งนาที เขาเดินได้ 112×0.80 เมตร = 89.6 เมตร

อัตราเร็วของการก้าวเท้าของเขาเท่ากับ 89.6 เมตรต่อนาที

ดังนั้น อัตราเร็วของการก้าวเท้าของภาคภูมิเท่ากับ 5.38 หรือ 5.4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

คำตอบต้องถูกทั้งสองคำตอบ (89.6 และ 5.4) หรือ จะแสดงวิธีทำหรือไม่ก็ได้

ข้อสังเกต: ยอมรับคำตอบที่คลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ เช่น 90 เมตรต่อนาที และ 5.3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง (89×60) เช่น

- 89.6, 5.4
- 90, 5.376 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- 89.8, 5376 เมตรต่อชั่วโมง [ข้อสังเกต ถ้าคำตอบที่สองไม่ได้ใส่หน่วย ควรให้คะแนนบางส่วน]

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	33.93
เกาหลี	20.59
ฮ่องกง-จีน	45.35
มาเก๊า-จีน	42.04
ไทย	9.08

ได้คะแนนบางส่วน

เหมือนคำตอบถูก แต่ไม่ได้คูณ 0.80 เพื่อแปลงหน่วยจากจำนวนครั้งของการก้าวเท้าในหนึ่งนาทีเป็นระยะทางที่ก้าวได้เป็นเมตรในหนึ่งนาที เช่น

- อัตราเร็วของการก้าวเท้าเท่ากับ 112 เมตรต่อนาที และ 6.72 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- 112, 6.72 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

หรือ อัตราเร็วของการก้าวเท้าในหน่วยเมตรต่อนาทีถูกต้อง (89.6 เมตรต่อนาที) แต่แปลงเป็นหน่วยกิโลเมตรต่อชั่วโมง ไม่ถูกต้อง หรือไม่ใส่ เช่น

- 89.6 เมตรต่อนาที, 8960 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- 89.6, 5376
- 89.6, 53.76
- 89.6, 0.087 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- 89.6, 1.49 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

หรือ ขั้นตอนถูกต้อง (แสดงวิธีทำชัดเจน) แต่การคำนวณคลาดเคลื่อน เช่น

- $n = 140 \times 0.8 = 1120$; $1120 \times 0.8 = 896$ เขาก้าว 896 เมตรต่อนาที, 53.76 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- $n = 140 \times 0.8 = 116$; $116 \times 0.8 = 92.8$ 92.8 เมตรต่อนาที -> 5.57 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

หรือ ตอบ 5.4 กิโลเมตรต่อชั่วโมงเพียงคำตอบเดียว ไม่ได้ตอบ 89.6 เมตรต่อนาที (ไม่แสดงวิธีทำ) เช่น

- 5.4
- 5.376 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- 5376 เมตรต่อชั่วโมง

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

การวิเคราะห์และแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา



สถานการณ์โจทย์

ในสถานการณ์โจทย์ข้อนี้ แสดงถึงความสัมพันธ์ของจำนวนครั้งของการก้าวเท้าในเวลาหนึ่งนาทีกับความยาวของการก้าวเท้าหนึ่งก้าว (หน่วยเป็นเมตร) ซึ่งเป็นสถานการณ์ใกล้ตัวนักเรียนที่ควรเข้าใจถึงความสัมพันธ์นี้ว่า ระยะทางที่เดินในช่วงเวลาหนึ่ง จะได้ระยะทางมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งของการก้าวเท้าและความยาวของการก้าวเท้าแต่ละก้าว ความยาวของการก้าวเท้าของแต่ละคนไม่เท่ากัน จำนวนครั้งของการก้าวเท้าในเวลาหนึ่งนาทีของแต่ละคนก็จะไม่เท่ากัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับอัตราเร็วของการก้าวเท้า ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งของการก้าวในเวลาหนึ่งนาที และความยาวของก้าว (หน่วยเป็นเมตร) ผู้รู้สามารถนำมาประมวลโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นสูตรได้ โดยเมื่อกำหนดให้ n แทนจำนวนครั้งของการก้าวเท้าในเวลาหนึ่งนาที และ p แทนความยาวของก้าว (หน่วยเป็นเมตร) สำหรับผู้ชายได้สูตร $\frac{n}{p} = 140$



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในคำถามทั้งสองข้อ โจทย์กำหนดค่าของตัวแปรมาให้ แล้วหาค่าถึงแม้ในสมการหรือสูตร $\frac{n}{p} = 140$ จะมีตัวแปรสองตัว แต่นักเรียนก็สามารถใช้การแทนค่าตัวแปรหนึ่งตัว ทำให้เกิดสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และใช้สมบัติของการเท่ากันหาค่าของตัวแปรที่เหลืออีกหนึ่งตัวได้

นอกจากนี้ยังใช้ความสัมพันธ์ของอัตราเร็วของการก้าวเท้าเดินที่ไม่ได้กำหนดมาในโจทย์ ดังนี้

อัตราเร็วของการก้าวเท้าเดินคิดเป็นเมตรต่อนาที หมายถึง ระยะทางที่เดินได้ในเวลาหนึ่งนาที (หน่วยเป็นเมตร) ซึ่งเท่ากับ จำนวนครั้งของการก้าวในเวลาหนึ่งนาที คูณกับความยาวของก้าวหนึ่งก้าว (หน่วยเป็นเมตร)



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

คำถามที่ 1 ถ้าใช้สูตรที่ให้มากับการเดินของสมรักษ์ ผู้ซึ่งก้าวเท้าได้ 70 ครั้ง ในเวลาหนึ่งนาที่ ความยาวของก้าว (p) ของสมรักษ์เป็นเท่าไร

แนวคิด

$$\text{จากสูตร } \frac{n}{p} = 140$$

กำหนดให้ $n = 70$ ครั้ง/นาที่ และ p แทนความยาวของก้าวของสมรักษ์

$$\text{จะได้ } \frac{70}{p} = 140$$

$$70 = 140p$$

$$p = \frac{70}{140}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ หรือ } 0.5 \text{ เมตร}$$

นั่นคือ ความยาวของก้าวของสมรักษ์เป็น 0.5 เมตร

คำถามที่ 2 ภาควิทยาบอกว่าความยาวของก้าวของเขาเป็น 0.80 เมตร และสามารถใช้สูตรข้างต้นกับการก้าวเท้าของภาควิทยา จึงแสดงวิธีคำนวณหาอัตราเร็วของการเดินทางของภาควิทยาเป็นเมตรต่อนาที และเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง

แนวคิด

คำถามข้อนี้นักเรียนจะต้องเข้าใจถึงความสัมพันธ์ว่า ระยะทางที่ภาควิทยาเดินได้ในเวลาหนึ่งนาที่ จะเท่ากับ ผลคูณของจำนวนครั้งของการก้าวในเวลาหนึ่งนาที่กับความยาวของก้าวของภาควิทยาหนึ่งก้าว ซึ่งสามารถแสดงวิธีทำได้ดังนี้

$$\text{จากสูตร } \frac{n}{p} = 140$$

กำหนดให้ $p = 0.80$ เมตร และ n แทนจำนวนครั้งของ

การก้าวในเวลาหนึ่งนาที่ ของภาควิทยา

$$\text{จะได้ } \frac{n}{0.80} = 140$$

$$n = 140 \times 0.80$$

$$= 112 \text{ ก้าว}$$

ดังนั้น ในเวลา 1 นาที่ ภาควิทยาเดินได้ 112 ก้าว

แสดงว่า ในเวลา 1 นาที่ ภาควิทยาเดินทางได้ $112 \times 0.80 = 89.6$ เมตร

หรือเดินทางด้วยอัตราเร็ว 89.6 เมตรต่อนาที

จะได้ อัตราเร็วคิดเป็น $89.6 \times 60 = 5,376$ เมตรต่อชั่วโมง

หรือคิดเป็น 5.376 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

นั่นคือ อัตราเร็วของการเดินทางของภาควิทยา เท่ากับ 89.6 เมตร/นาที่ หรือ 5.376

กิโลเมตร/ชั่วโมง



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

จากผลการสอบจะเห็นว่า มีนักเรียนไทยเพียง 17.30 เปอร์เซ็นต์ของนักเรียนไทยที่เข้าสอบเท่านั้นที่ตอบคำถามที่ 1 ได้ถูกต้อง สันนิษฐานได้ว่า นักเรียนไม่สามารถแปลความหมายของสูตรที่ให้ $\frac{n}{p} = 140$ ว่ามีความหมายอย่างไร 140 คืออะไร เกิดความสับสนไม่กล้าแสดงวิธีทำ แต่ถ้านักเรียนไม่คิดมาก แทนค่าตัวแปรตามข้อมูลที่โจทย์กำหนดก็จะได้คำตอบ หรืออาจหาค่าของตัวแปรไม่เป็นก็ได้

จากผลการสอบจะเห็นว่า มีนักเรียนไทยเพียง 9.08 เปอร์เซ็นต์จำนวนของนักเรียนไทยที่เข้าสอบเท่านั้นที่ตอบคำถามที่ 2 ได้ถูกต้อง จากการวิเคราะห์คำถาม คาดว่านักเรียนไม่เข้าใจคำถามที่ให้คำนวณหาอัตราเร็วของการเดินทางของภาคภูมิ ซึ่งไม่ตรงกับข้อความในสถานการณ์โจทย์ที่กำหนดให้ k แทนจำนวนครั้งของการก้าวในเวลาหนึ่งนาที่ และอาจไม่ทราบถึงวิธีการหาอัตราเร็วของการเดินทางของภาคภูมิว่าจะหาได้อย่างไร จึงทำให้นักเรียนไม่ตอบหรือตอบผิด

ในกรณีที่ครูนำสถานการณ์โจทย์ปัญหาในทำนองนี้ไปใช้ในการเรียนการสอนครูควรทำความเข้าใจกับนักเรียนเกี่ยวกับการใช้คำว่า “เท่ากับ” แสดงผลการคำนวณหรือผลลัพธ์ว่า โดยปกติแล้วทางคณิตศาสตร์เมื่อใช้คำว่า “เท่ากับ” ถือว่าเป็นค่าจริง แต่ในทางปฏิบัติและในวิชาอื่น เช่น วิทยาศาสตร์ และสังคมศาสตร์มักมีการอนุโลมให้เป็นค่าประมาณได้ ซึ่งครูควรฝึกให้นักเรียนได้ตระหนักในเรื่องนี้และใช้อย่างเหมาะสม นอกจากนี้ครูควรให้นักเรียนรู้จักสังเกตการเดินทางของตัวเอง ว่ามีความสัมพันธ์ของตัวแปรอย่างไรที่โจทย์กำหนดมาให้หรือใกล้เคียงกันหรือไม่ หรือฝึกให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของสิ่งที่อยู่รอบตัวหรือในสถานการณ์ที่กำหนดมาให้ และลองหาสูตรง่าย ๆ เกี่ยวกับความสัมพันธ์นั้น แล้วใช้สูตรนั้นไปหาค่าของตัวแปรที่เกี่ยวข้องเช่นเดียวกับโจทย์ หรืออาจเริ่มจากกำหนดความสัมพันธ์ไว้ในทำนองเดียวกับในหนังสือเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตอนต้นบทเรียน เช่น พิจารณาแบบรูปที่นำไปสู่การค้นพบสูตรหรือสมการก็ได้ นอกจากนี้แล้วครูจะสังเกตเห็นว่านักเรียนหลายคนมักมีข้อบกพร่องในการแทนค่า ตัวแปรและหาค่าตัวแปรได้อย่างถูกต้อง ซึ่งเรื่องนี้มีควมสำคัญอย่างยิ่งเพราะนักเรียนจะต้องนำไปใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องมากขึ้นเรื่อย ๆ ครูจึงต้องให้ความสำคัญในการฝึกฝนนักเรียนให้มากขึ้นด้วย



ครูอาจให้นักเรียนตรวจสอบระยะก้าวเดิน 1 ก้าวของนักเรียนเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการประมาณความยาวหรือระยะทาง อาจให้นักเรียนนำความยาวของก้าวเท้า 1 ก้าว ไปใช้ประโยชน์ ดังตัวอย่างโจทย์ต่อไปนี้

1. ปกติวิทยาเดินไปโรงเรียน โดยใช้เวลาประมาณ 25 นาที ถ้าความยาวของก้าวเดิน 1 ก้าว เท่ากับ 40 เซนติเมตร วิทยาจับเวลาดูพบว่า ในเวลา 1 นาที เขาเดินได้ 120 ก้าว

คำถามที่ 1 อัตราเร็วในการเดินของวิทยาต่อชั่วโมงเป็นเท่าไร

แนวคิด

ในเวลา 1 นาที วิทยาเดินได้ระยะทาง 120×0.4 เมตร

60 นาที วิทยาเดินได้ระยะทาง $120 \times 0.4 \times 60$

$= 2,880$ เมตร

ดังนั้น อัตราเร็วในการเดินของวิทยาเท่ากับ 2.88 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

คำถามที่ 2 บ้านของวิทยาอยู่ห่างจากโรงเรียนประมาณกี่กิโลเมตร

แนวคิด

ในเวลา 60 นาที วิทยาเดินได้ระยะทาง 2,880 เมตร

25 นาที วิทยาเดินได้ระยะทาง $\frac{2,880 \times 25}{60}$

$= 1,200$ เมตร

ดังนั้น บ้านของวิทยาอยู่ห่างจากโรงเรียนประมาณ 1.2 กิโลเมตร

2. พลและก้องเป็นนักกรีฑาของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ในการทดสอบการวิ่งของแต่ละคน เพื่อเก็บข้อมูลเป็นสถิติของตนเอง พบว่า พลทดสอบการวิ่งในระยะทาง 7.2 กิโลเมตร ใช้เวลา 1.5 ชั่วโมง ก้องทดสอบการวิ่งในระยะทาง 4.5 กิโลเมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

คำถามที่ 1 ถ้าให้ x แทนระยะทาง (เมตร) และ y แทน เวลา (นาที) จงเขียนสมการแสดงอัตราเร็วโดยเฉลี่ยของแต่ละคน

แนวคิด

อัตราเร็วในการวิ่งของพล เท่ากับ $\frac{7,200}{90} = 80$

ดังนั้น สมการคือ $\frac{x}{y} = 80$

อัตราเร็วในการวิ่งของก้อง เท่ากับ $\frac{4,500}{60} = 75$

ดังนั้น สมการคือ $\frac{x}{y} = 75$



คำถามที่ 2 ถ้าในการวิ่งแข่งขันระยะทางที่เท่ากันครั้งหนึ่ง ใครน่าจะถึงเส้นชัยก่อน เพราะเหตุใด

แนวคิด

เปรียบเทียบอัตราเร็วของพลและก้องดังนี้

อัตราเร็วในการวิ่งของพล คือ $\frac{x}{y} = 80$

หมายความว่า พลวิ่งด้วยอัตราเร็วโดยเฉลี่ย 80 เมตรต่อนาที

อัตราเร็วในการวิ่งของก้อง คือ $\frac{x}{y} = 75$

หมายความว่า ก้องวิ่งด้วยอัตราเร็วโดยเฉลี่ย 75 เมตรต่อนาที

ดังนั้น พลน่าจะถึงเส้นชัยก่อนก้อง เพราะในเวลาเท่ากันพลวิ่งได้ระยะทางมากกว่าก้อง

คำถามที่ 3 ถ้าในการวิ่งแข่งขันระยะทาง 3 กิโลเมตร ใครจะถึงเส้นชัยก่อน และจะถึงก่อนกี่นาที

แนวคิด

เวลาในการวิ่งของพล คือ $\frac{3,000}{80} = 37.5$ นาที

เวลาในการวิ่งของก้อง คือ $\frac{3,000}{75} = 40$ นาที

ดังนั้น พลน่าจะวิ่งถึงเส้นชัยก่อนก้องเท่ากับ $40 - 37.5 = 2.5$ นาที

คำถามที่ 4 ในการวิ่งครั้งหนึ่ง ถ้าต้องการให้ทั้งสองคนถึงเส้นชัยพร้อมกัน ใครจะต้องต่อระยะทางให้กับใคร และต่อระยะทางให้กี่เมตร

แนวคิด

จากคำถามที่ 3 ในระยะทางที่เท่ากัน พลวิ่งถึงเส้นชัยก่อนก้อง 2.5 นาที

ดังนั้น พลควรต่อระยะทางให้ก้องในระยะทางที่ใช้เวลาวิ่ง 2.5 นาที

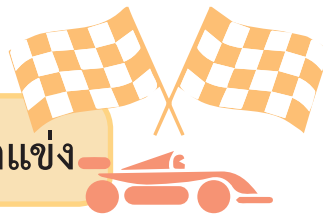
เนื่องจาก ก้องวิ่งด้วยอัตราเร็ว 75 เมตรต่อนาที

ดังนั้น ในเวลา 2.5 นาที ก้องวิ่งได้ระยะทางเท่ากับ

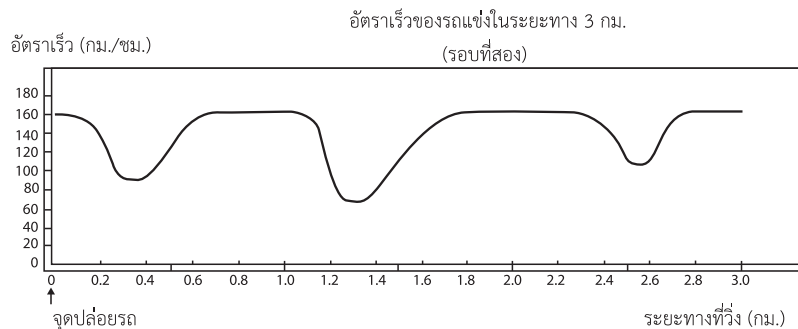
$$2.5 \times 75 = 187.5 \text{ เมตร}$$

นั่นคือ ถ้าจะให้ทั้งสองคนวิ่งเข้าเส้นชัยพร้อมกัน พลต้องต่อระยะทางให้ก้อง 187.5 เมตร

ความเร็วของรถแข่ง



กราฟต่อไปนี้แสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงความเร็วของรถแข่งคันหนึ่ง ที่วิ่งในสนามแข่งทางราบ ระยะทาง 3 กิโลเมตร



คำถามที่ 1: รถแข่ง

ระยะทางโดยประมาณจากจุดปล่อยรถจนถึงจุดเริ่มต้นของส่วนที่เป็นทางตรงยาวที่สุดของสนามแข่งเป็นระยะทางเท่าไร

1. 0.5 กิโลเมตร
2. 1.5 กิโลเมตร
3. 2.3 กิโลเมตร
4. 2.6 กิโลเมตร

คะแนนเต็ม

ตอบ ข้อ 2. 1.5 กิโลเมตร

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 82.20

เกาหลี 75.50

ฮ่องกง-จีน N/A

ไทย 34.60

คำถามที่ 2: รถแข่ง

อัตราเร็วที่ต่ำสุดในระยะที่สองของรถแข่งคันนี้เกิดขึ้น ณ จุดไหน

1. ที่จุดเริ่มต้น
2. ที่ประมาณกิโลเมตรที่ 0.8
3. ที่ประมาณกิโลเมตรที่ 1.3
4. ครึ่งรอบสนาม

คะแนนเต็ม

ตอบ ข้อ 3. ที่ประมาณกิโลเมตร ที่ 1.3

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 90.20

เกาหลี 90.90

ฮ่องกง-จีน 89.50

ไทย 72.10



คำถามที่ 3: รถแข่ง

อัตราเร็วของรถแข่งระหว่างกิโลเมตรที่ 2.6 และกิโลเมตรที่ 2.8 เป็นอย่างไร

1. อัตราเร็วคงที่
2. อัตราเร็วเพิ่มขึ้น
3. อัตราเร็วลดลง
4. ไม่สามารถบอกอัตราเร็วได้จากกราฟ

คะแนนเต็ม

ตอบ ข้อ 2. อัตราเร็วเพิ่มขึ้น

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 87.90

เกาหลี 86.90

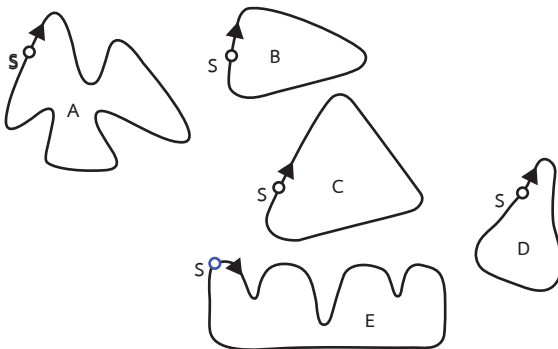
ฮ่องกง-จีน 82.00

ไทย 68.30

คำถามที่ 4: รถแข่ง

ภาพต่อไปนี้ คือ ทางวิ่งของสนามแข่งรถห้าแบบด้วยกัน

สนามแข่งรถที่ทำให้รถมีอัตราเร็วสอดคล้องกับกราฟข้างต้น สนามแข่งควรจะมีลักษณะอย่างไร



S: จุดปล่อยรถ

คะแนนเต็ม

ตอบ รูป B

ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : ฟังก์ชัน

สถานการณ์ : ส่วนตัว/ส่วนบุคคล

สมรรถนะ : -

แบบของข้อสอบ : เลือกตอบ

ประเทศ % ตอบถูก

ญี่ปุ่น 53.90

เกาหลี 32.80

ฮ่องกง-จีน 36.40

ไทย 17.54



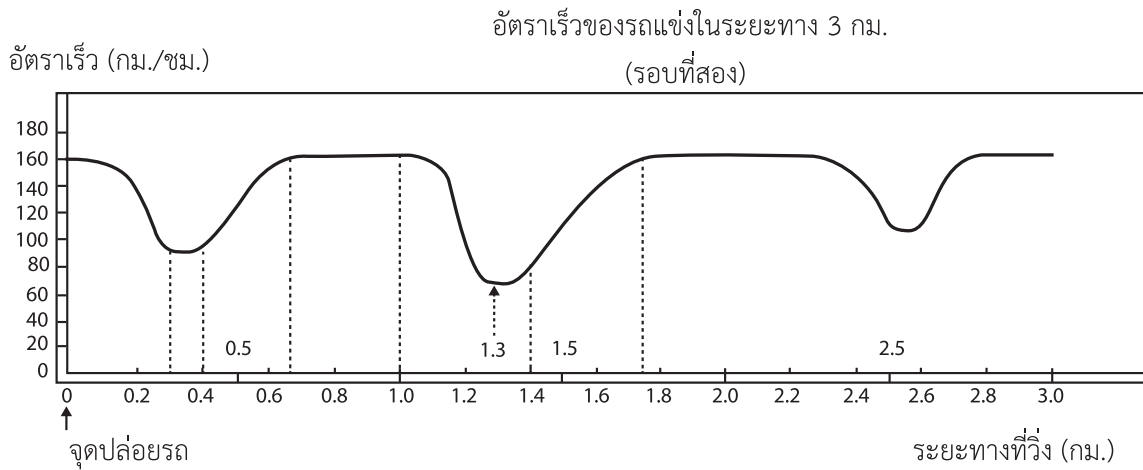
สถานการณ์โจทย์

กราฟที่กำหนดให้ในสถานการณ์นี้แสดงถึงความสัมพันธ์ของอัตราเร็วของรถแข่ง (กิโลเมตร/ชั่วโมง) กับระยะทางที่รถแข่งวิ่งได้ (กิโลเมตร) ความสัมพันธ์นี้เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ในชีวิตจริง นักเรียนควรมีสامัญสำนึกเกี่ยวกับความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ โดยรู้ว่าถ้าในเวลาคงที่ (1 หน่วยเวลา) รถคันใดแล่นด้วยอัตราเร็วที่มากกว่า ก็จะได้ระยะทางที่มากกว่า ถ้าวิ่งทางตรงจะใช้อัตราเร็วสูงและเพิ่มอัตราเร็วขึ้นได้อย่างต่อเนื่องได้ แต่ถ้าวิ่งทางโค้งรถจะต้องลดอัตราเร็วลง ยิ่งเป็นทางโค้งมากอย่างที่เราเรียกว่า โค้งหักศอก รถก็ต้องลดอัตราเร็วลงอย่างมาก เพื่อให้เกิดความปลอดภัย นอกจากนี้แล้ว นักเรียนควรรู้จักถึงสภาพของทางวิ่งในสนามแข่งรถทั่วไปที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว (simple closed curve) ซึ่งกล่าวถึงไว้ในเนื้อหาตอนหนึ่งของหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของ สสวท. และรู้จักการใช้อัตราเร็วของผู้ขับรถแข่งในสภาพของทางวิ่งรอบสนาม เช่น เมื่อขับรถเข้าทางตรงก็ใช้อัตราเร็วได้มาก เมื่อขับเข้าทางโค้งก็ลดอัตราเร็ว และเมื่อขับออกจากทางโค้งเข้าทางตรงก็เพิ่มอัตราเร็วขึ้นได้อีก



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

นักเรียนจะต้องมีความรู้เรื่องกราฟและความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณ ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์กันระหว่างอัตราเร็วกับระยะทาง นักเรียนจะต้องมีความสามารถอ่านและแปลความหมายของกราฟโดยใช้การนึกภาพได้อย่างถูกต้องว่า กราฟที่มีลักษณะเป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกนนอน หรือเป็นส่วนของเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกนนอน หรือแกนตั้ง หรือกราฟมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง กราฟในแต่ละลักษณะมีความหมายอย่างไร ดังตัวอย่างการอ่านและแปลความหมายของกราฟในบางช่วงตั้งแต่จุดปล่อยรถถึงระยะทางประมาณกิโลเมตรที่ 1.0 ต่อไปนี้



1. กราฟแสดงการวิ่งของรถแข่งในรอบที่สองเริ่มจากจุดปล่อยรถ กราฟแสดงอัตราเร็วของรถประมาณ 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และช่วงต่อมากราฟมีลักษณะเป็นเส้นโค้งเอียงลาดลงตามแนวดิ่ง จนถึงอัตราเร็วประมาณ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง กราฟแสดงการรักษาอัตราเร็วของรถต่อระยะทางที่แสดงช่วงของระยะทางประมาณ 0.3 - 0.4 กิโลเมตร การแปลความหมายกราฟช่วงนี้ อธิบายได้ว่า เมื่อรถคันนี้วิ่งในรอบที่สองมาถึงจุดปล่อยรถใช้อัตราเร็วประมาณ 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ต่อจากนั้นรถคันนี้ก็ลดอัตราเร็วลงเรื่อย ๆ จนถึงประมาณ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง แปลความได้ว่า รถกำลังเลี้ยวเข้าโค้งของสนามแข่ง ต้องใช้ความเร็วรถน้อยลงจึงจะปลอดภัย และรักษาอัตราเร็ว 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นระยะทางประมาณ 100 เมตร หรือ 0.1 กิโลเมตร

2. การพิจารณากราฟต่อจากข้อ 1 ระยะทางประมาณที่ 0.4 กิโลเมตรถึง 0.65 กิโลเมตร มีลักษณะใกล้เคียงส่วนของเส้นตรงที่เอียงขึ้นไปทางขวาของแกนนอน แสดงถึงการใช้อัตราเร็วของรถเพิ่มขึ้นจากประมาณ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ไปจนถึง 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง การแปลความกราฟช่วงนี้อธิบายได้ว่ารถกำลังวิ่งออกจากทางโค้งของสนามเข้าสู่ทางตรงเป็นระยะทางประมาณ 0.25 กิโลเมตร เมื่อพิจารณากราฟต่อจากช่วงนี้อีกประมาณ 0.5 กิโลเมตร กราฟเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ขนานกับแกนนอนแสดงว่ารถคันนี้ใช้อัตราเร็วคงที่ประมาณ 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ซึ่งแปลความหมายว่า รถวิ่งทางตรงของสนามเป็นระยะทางประมาณ 500 เมตร

เมื่อพิจารณากราฟแสดงการวิ่งของรถแข่งครบ 1 รอบสนาม พบว่า รถต้องวิ่งเข้าโค้ง 3 โค้ง และวิ่งทางตรงระหว่างโค้งอีก 3 ช่วง ใช้ความรู้สึกรู้สึกเชิงปริภูมิจินตนาการลักษณะของสนามแข่งได้เป็นรูปปิดที่มี 3 ด้าน 3 โค้งและมีด้านหนึ่งยาวกว่าอีกสองด้าน



แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

- คำถามที่ 1** ระยะทางโดยประมาณจากจุดปล่อยรถจนถึงจุดเริ่มต้นของส่วนที่เป็นทางตรงยาวที่สุดของสนามแข่งเป็นระยะทางเท่าไร

แนวคิด จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อรถวิ่งทางตรงจะใช้อัตราเร็วประมาณ 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อถึงระยะทางที่ 1.5 กิโลเมตร โดยประมาณ รถใช้อัตราเร็วประมาณ 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมงอีกและแล่นต่อไปจนถึงระยะทางประมาณ 2.3 กิโลเมตร ซึ่งเป็นระยะทางตรงที่ยาวที่สุดของสนาม จึงได้คำตอบตรงกับคำตอบข้อ 2

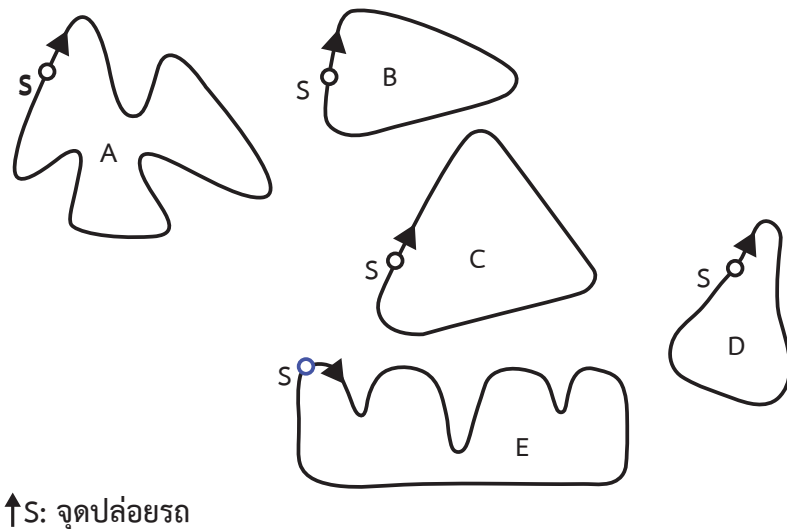
- คำถามที่ 2** อัตราเร็วที่ต่ำที่สุดในระยะที่สองของรถแข่งคันนี้เกิดขึ้น ณ จุดไหน

แนวคิด จากการอ่านและแปลความหมายกราฟ จะได้คำตอบตรงกับคำตอบข้อ 3 คือประมาณกิโลเมตรที่ 1.3

- คำถามที่ 3** อัตราเร็วของรถแข่งระหว่างกิโลเมตรที่ 2.6 และกิโลเมตรที่ 2.8 เป็นอย่างไร

แนวคิด จากการอ่านและแปลความหมายกราฟ จะเห็นว่า รถแข่งเลี้ยวออกจากทางโค้งของสนามเข้าสู่ทางตรงในช่วงกิโลเมตรที่ 2.6 ถึง 2.8 ซึ่งเห็นได้จากกราฟแสดงอัตราเร็วของรถเพิ่มขึ้น

- คำถามที่ 4** ภาพต่อไปนี้ คือ ทางวิ่งของสนามแข่งรถห้าแบบด้วยกัน สนามแข่งรถที่ทำให้รถมีอัตราเร็วสอดคล้องกับกราฟข้างต้น สนามแข่งควรจะมีลักษณะอย่างไร



แนวคิด

จะเห็นว่า คำถามที่ 4 เป็นคำถามย้อนกลับของสถานการณ์ที่กำหนดมาให้ จากภาพข้างต้น จะเห็นว่า รูป A และรูป E ไม่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ในกราฟที่กำหนดให้อย่างชัดเจน ดังนี้

รูป A มีทางวิ่งที่รถต้องลดอัตราเร็วตรงทางโค้งมากกว่า 3 โค้ง

รูป E ลักษณะของสนามมีช่วงโค้งมากกว่า 3 โค้ง

สำหรับรูป B รูป C และรูป D มีลักษณะของทางตรงและทางโค้งโดยรวม สอดคล้องกับกราฟ แต่รูป C และ รูป D ยังมีรายละเอียดของลักษณะที่ไม่สอดคล้อง ดังนี้

รูป C มีลักษณะไม่สอดคล้องกับกราฟเพราะมีส่วนของเส้นตรงที่แสดงถึงระยะทางตรงยาวเกือบเท่ากันทั้งสามช่วง และรูป D มีลักษณะไม่สอดคล้องกับกราฟ เพราะจากกราฟ ทางโค้งแรกจากจุดปล่อยรถต้องโค้งน้อยกว่าโค้งที่สอง สรุปได้ว่า รูป B เป็นรูปที่มีลักษณะสอดคล้องกับกราฟมากที่สุด



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. ครูอาจใช้คำถามให้นักเรียนอ่านและแปลความหมายกราฟเพิ่มเติม เพื่อให้ นักเรียนให้เหตุผลที่ยอมรับได้ว่ามีความสมเหตุสมผล เช่น

1) จากกราฟ ที่จุดปล่อยรถ รถคันนี้ใช้อัตราเร็วกี่กิโลเมตรต่อชั่วโมง

2) เป็นไปได้หรือไม่ที่รถจะเริ่มต้นด้วยอัตราเร็วเท่าที่ปรากฏในกราฟ

ถ้าเป็นไปไม่ได้ เหตุผลที่น่าจะทำให้กราฟมีลักษณะเป็นดังที่โจทย์กำหนด เป็นอย่างไร

คำถามสองข้อนี้ถามเพื่อให้นักเรียนสังเกตได้ว่า กราฟที่กำหนดเป็นกราฟของการ วิ่งของรถแข่งในรอบที่สอง ตำแหน่งของจุดปล่อยรถจึงแสดงอัตราเร็วที่ 160 กิโลเมตรต่อ ชั่วโมงได้ ถ้าโจทย์ไม่กำหนดว่าเป็นการวิ่งแข่งในรอบที่สอง อัตราเร็วเริ่มต้นที่ 160 กิโลเมตร ต่อชั่วโมง ก็เป็นไปไม่ได้ เพราะตอนเริ่มต้นวิ่งรถจะต้องอยู่กับที่ (มีอัตราเร็วเป็นศูนย์) แล้ว ค่อย ๆ เพิ่มอัตราเร็วขึ้นไปอย่างต่อเนื่อง

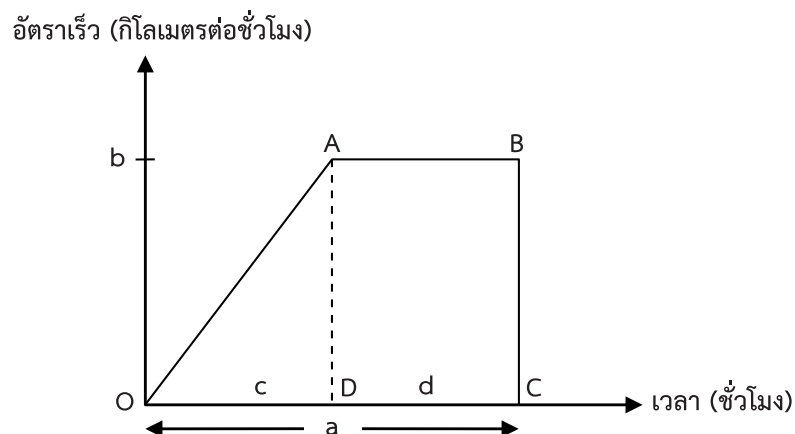
2. มีข้อสังเกตว่านักเรียนไทยตอบคำถามที่ 4 ได้ถูกต้องเป็นส่วนน้อยมาก คือ ประมาณ 18 เปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ และนักเรียนของประเทศอื่นๆ ตามที่ระบุนา ก็มีเปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนที่ตอบถูกน้อยกว่าในคำถามที่ 1 ถึงคำถาม ที่ 3 สันนิษฐานได้ว่าคำถามที่ 1 ถึงคำถามที่ 3 เป็นการหาคำตอบจากการอ่านกราฟโดยตรง แต่คำถามที่ 4 เป็นสถานการณ์ที่นักเรียนไม่คุ้นเคยกับการเชื่อมโยงข้อมูลจากกราฟมาแปล ความหมายให้อยู่ในรูปเรขาคณิตสองมิติ ซึ่งนักเรียนจะต้องมีความเข้าใจถึงธรรมชาติใน การขับรถบนเส้นทางตรงกับเส้นทางโค้งว่าการขับรถเข้าโค้งเพื่อให้รถวิ่งออกนอกโค้ง จะต้องลดอัตราเร็วของรถให้น้อยลง ให้รถวิ่งอย่างช้า ๆ เพื่อสามารถประคองรถให้อยู่ใน เส้นทางได้ นอกจากนี้ นักเรียนจะต้องใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิในการจินตนาการ และการ



นี้ภาพถึงลักษณะของสนามแข่งรถที่สอดคล้องกับลักษณะของกราฟว่ามีความใกล้เคียงกับแบบจำลองทางเรขาคณิตใด โดยในสถานการณ์นี้นักเรียนน่าจะบอกได้ว่าสนามแข่งต้องมี 3 โค้ง สอดคล้องกับกราฟที่มีการลดอัตราเร็วของรถ 3 ครั้ง และโค้งช่วงใดน่าจะมีความโค้งมากที่สุด โดยอาศัยความรู้สึกเชิงปริภูมิวิเคราะห์ข้อมูลระหว่างกราฟกับแบบจำลองทางเรขาคณิตสองมิตินั้น

3. ครูอาจเพิ่มทักษะในเรื่องการอ่านและการแปลความหมายกราฟ โดยนำกราฟที่มีอยู่ในหนังสือเรียนหรือในวารสารต่างๆ มาปรับใช้ให้เหมาะสมกับความรู้และสถานการณ์แวดล้อมของนักเรียน โดยเน้นเกี่ยวกับการอ่านและการแปลความหมายที่สอดคล้องกับเรื่องราวหรือสถานการณ์ในยุคปัจจุบันและกลับกัน ดังตัวอย่างสถานการณ์ต่อไปนี้

สถานการณ์ที่ 1 กราฟต่อไปนี้แสดงการเคลื่อนที่ของรถยนต์คันหนึ่งในช่วงเวลา a ชั่วโมง



คำถามที่ 1 จงแสดงว่าระยะทางที่รถยนต์คันนี้เคลื่อนที่ได้แทนได้ด้วยพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม OABC

แนวคิด จากกราฟข้างต้นแสดงว่ารถยนต์คันนี้ขับจากจุดเริ่มต้นและเพิ่มอัตราเร็วอย่างสม่ำเสมอเป็นเวลา c ชั่วโมงจนถึงอัตราเร็ว b กิโลเมตรต่อชั่วโมง จากนั้นก็ขับรถยนต์ด้วยอัตราเร็วคงที่ b กิโลเมตรต่อชั่วโมงต่อไปอีก d ชั่วโมง จะหาระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ดังนี้

1) จะได้ระยะทางในเวลาช่วง c ชั่วโมงแรกเท่ากับ $\frac{1}{2} \times c \times b$ ซึ่งเท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม OAD



2) จะได้ระยะทางในเวลาช่วง d ชั่วโมงต่อไปเท่ากับ $d \times b$ กิโลเมตร ซึ่งเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

จาก 1) และ 2) รถยนต์เคลื่อนที่ได้ในเวลา a ชั่วโมง เท่ากับ

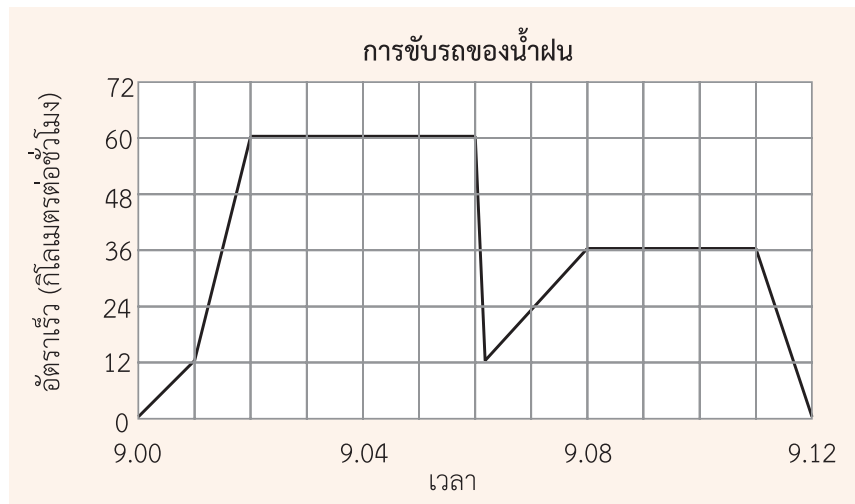
$$\left(\frac{1}{2} \times c \times b\right) + (d \times b) = \left(\frac{c}{2} + d\right) b \text{ ซึ่งเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม OABC}$$

ดังนั้น ระยะทางที่รถยนต์คันนี้เคลื่อนที่ได้แทนได้ด้วยพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม OABC

สถานการณ์ที่ 2 (เป็นข้อสอบ PISA ปี ค.ศ. 2006)

ขับรถ

เช้าวันหนึ่ง น้ำฝนออกไปขับรถเล่น ระหว่างทางแมวตัวหนึ่งวิ่งตัดหน้ารถ น้ำฝนต้องเหยียบเบรคอย่างกะทันหันเพื่อไม่ให้ชนแมว น้ำฝนตกใจมากจนมือสั่น จึงตัดสินใจขับรถกลับบ้าน กราฟต่อไปนี้แสดงการบันทึกอัตราเร็วของรถอย่างคร่าว ๆ



คำถามที่ 1

แนวคิด

อัตราเร็วสูงสุดที่น้ำฝนขับในเช้าวันนั้นเป็นเท่าไร

อ่านจากกราฟตามแนวตั้ง จะได้ว่าอัตราเร็วสูงสุดเท่ากับ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

คำถามที่ 2

แนวคิด

เมื่อน้ำฝนเริ่มเหยียบเบรคเพื่อไม่ให้ชนแมว ขณะนั้นเป็นเวลาเท่าใด

อ่านจากกราฟตามแนวนอน จะได้ว่าเป็นเวลา 9.06 น. หรือเก้าโมงหกนาที

คำถามที่ 3

สามารถบอกได้หรือไม่ว่า เส้นทางที่น้ำฝนขับรถกลับบ้านสั้นกว่าเส้นทางที่เธอออกจากบ้านถึงจุดที่จะชนแมว จงใช้ข้อมูลจากกราฟอธิบายเพื่อสนับสนุนคำตอบของนักเรียน



แนวคิด 1

สามารถบอกได้ อธิบายได้ดังนี้

1) หาระยะทางที่น้ำฝนขับรถออกจากบ้านถึงจุดที่จะชนแมวได้ ดังนี้

จากเวลา 9.00 น. – 9.01 น. เป็นเวลา $\frac{1}{60}$ ชั่วโมง ใช้อัตราเร็วเฉลี่ย

เท่ากับ $\frac{0 + 12}{2} = 6$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ได้ระยะทาง $\frac{1}{60} \times 6 = 0.1$ กิโลเมตร

จากเวลา 9.01 น. – 9.02 น. เป็นเวลา $\frac{1}{60}$ ชั่วโมง ใช้อัตราเร็วเฉลี่ย

เท่ากับ $\frac{12 + 60}{2} = 36$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ได้ระยะทาง $\frac{1}{60} \times 36 = 0.6$ กิโลเมตร

จากเวลา 9.02 น. – 9.06 น. เป็นเวลา $\frac{4}{60}$ ชั่วโมง ใช้อัตราเร็ว

60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ได้ระยะทาง $\frac{4}{60} \times 60 = 4$ กิโลเมตร

ดังนั้น ระยะทางจากบ้านถึงจุดที่จะชนแมวเท่ากับ

$$0.1 + 0.6 + 4 = 4.7 \text{ กิโลเมตร}$$

2) หาระยะทางจากจุดที่จะชนแมว และขับรถกลับถึงบ้านได้ดังนี้

จากเวลา 9.06 น. – 9.08 น. เป็นเวลา $\frac{2}{60}$ ชั่วโมง ใช้อัตราเร็วเฉลี่ย

ประมาณ $\frac{12 + 36}{2} = 24$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ได้ระยะทาง $\frac{2}{60} \times 24 = 0.8$ กิโลเมตร

จากเวลา 9.08 น. – 9.11 น. เป็นเวลา $\frac{3}{60}$ ชั่วโมง ใช้อัตราเร็ว

36 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ได้ระยะทาง $\frac{3}{60} \times 36 = 1.8$ กิโลเมตร

จากเวลา 9.11 น. – 9.12 น. เป็นเวลา $\frac{1}{60}$ ชั่วโมง ใช้อัตราเร็วเฉลี่ย

$\frac{36 + 0}{2} = 18$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง ได้ระยะทาง $\frac{1}{60} \times 18 = 0.3$ กิโลเมตร



ดังนั้น ระยะทางจากจุดที่จะชนแมวจึงบ้านเท่ากับ

$$0.8 + 1.8 + 0.3 = 2.9 \text{ กิโลเมตร}$$

นั่นคือ เส้นทางที่น้ำฝนขับรถกลับบ้านคือ 2.9 กิโลเมตร สั้นกว่าเส้นทางที่เธอออกจากบ้านถึงจุดที่จะชนแมว คือ 4.7 กิโลเมตร

แนวคิด 2 สามารถบอกได้ อธิบายได้ดังนี้

เมื่อพิจารณารกราฟ จะพบว่า เวลาที่น้ำฝนขับรถออกจากบ้านถึงเวลาที่เธอเบรคเพื่อไม่ให้ชนแมว ใช้เวลาเกือบเท่ากับเวลาที่เธอขับรถกลับบ้านหลังจากที่เธอเบรคเพื่อไม่ให้ชนแมว คือประมาณ 6 นาทีเท่ากัน ในขณะที่ช่วงแรกของการขับรถน้ำฝนใช้อัตราเร็วโดยเฉลี่ยสูงกว่าการขับรถในช่วงที่สองค่อนข้างมาก จึงประมาณได้ว่า เส้นทางที่น้ำฝนขับรถกลับบ้านสั้นกว่าเส้นทางที่เธอออกจากบ้าน ถึงจุดที่เธอเบรคเพื่อไม่ให้ชนแมว

แนวคิด 3 สามารถบอกได้ อธิบายได้ดังนี้

เมื่อพิจารณาพื้นที่ใต้กราฟโดยใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิ จะพบว่าพื้นที่ใต้กราฟตั้งแต่เวลา 9.00 น. ถึง 9.06 น. มากกว่าพื้นที่ใต้กราฟตั้งแต่เวลา 9.06 น. ถึง 9.12 น. กล่าวคือประมาณ 23.5 ตารางหน่วย กับ 14.5 ตารางหน่วย ตามลำดับ โดยหนึ่งตารางหน่วยจะเป็นตัวแทนของผลคูณระหว่างเวลาหนึ่งนาทีกับอัตราเร็ว 12 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือหนึ่งตารางหน่วย แทน $\frac{1}{60} \times 12 = 0.2$ กิโลเมตร ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ถ้ามีพื้นที่ใต้กราฟมากกว่าก็จะมีระยะทางมากกว่าตามไปด้วย โดยมีอัตราส่วน 1 ตารางหน่วยต่อ 0.2 กิโลเมตร

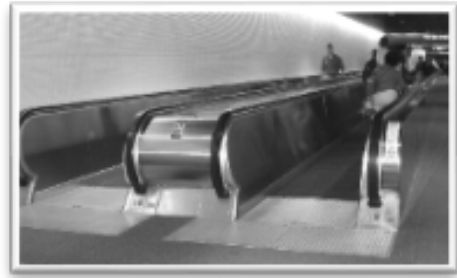
ดังนั้น เส้นทางที่น้ำฝนขับรถกลับบ้านสั้นกว่าเส้นทางที่เธอออกจากบ้านถึงจุดที่จะชนแมว

ทางเลื่อน

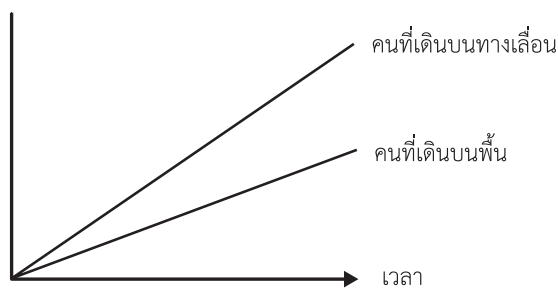


ทางขวเป็นรูปของทางเลื่อน

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาต่อไปนี้
แสดงการเปรียบเทียบระหว่าง “การเดินทางบนทางเลื่อน”
กับ “การเดินทางบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน”



ระยะทางจากจุดเริ่มต้น
ของทางเลื่อน



ลักษณะเฉพาะของข้อสอบ

เนื้อหา : การเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์

แขนงวิชา : -

สถานการณ์ : ในเชิงวิทยาศาสตร์

สมรรถนะ : การสะท้อน และสื่อสารทาง
คณิตศาสตร์

แบบของข้อสอบ : สร้างคำตอบแบบอิสระ

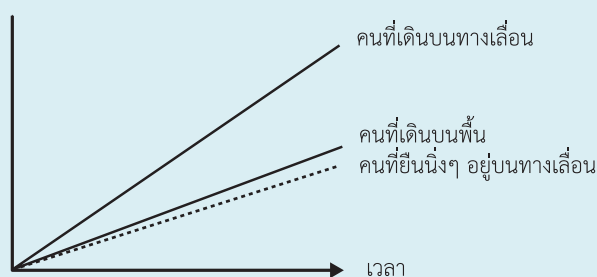
คำถามที่ 1 : ทางเลื่อน

ตามกราฟข้างบน ถ้าถือว่าคนทั้งสองคนมีระยะก้าวเท่า ๆ กัน จงเขียนเส้นเพิ่มลงในกราฟ
ข้างบนแสดงระยะทางกับเวลาของคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน

คะแนนเต็ม

ยอมรับเส้นที่อยู่ใต้เส้นสองเส้นที่ให้มา แต่เส้นนั้นต้องอยู่ใกล้เส้นที่แสดงถึง
“คนที่เดินบนพื้น” มากกว่าเส้นแนวนอน

ระยะทางจากจุดเริ่มต้น
ของทางเลื่อน



ไม่มีคะแนน

คำตอบอื่นๆ

ประเทศ	% ตอบถูก
ญี่ปุ่น	46.78
เกาหลี	45.51
ฮ่องกง-จีน	48.46
มาเก๊า-จีน	37.31
ไทย	16.54



สถานการณ์โจทย์

โจทย์แสดงรูปทางเลื่อน และกราฟเส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางจากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อนกับเวลา มา 2 เส้น โดยเส้นหนึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางจากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อนกับเวลาที่คนเดินบนทางเลื่อน อีกเส้นหนึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางจากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อนกับเวลาที่คนเดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน เพื่อแสดงการเปรียบเทียบระหว่าง “การเดินบนทางเลื่อน” กับ “การเดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน”

จากสถานการณ์โจทย์ มีสิ่งที่นักเรียนสังเกตได้จากกราฟที่ให้มาคือ ในระยะเวลาที่เท่ากัน คนที่เดินบนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้ระยะทางมากกว่าคนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน เมื่อโจทย์ให้เงื่อนไขว่า คนที่เดินบนทางเลื่อนและคนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนมีระยะก้าวเท่า ๆ กัน แสดงว่าระยะทางที่คนเดินบนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้มากกว่าคนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน คือระยะที่ได้จากการเคลื่อนที่ของทางเลื่อนในระยเวลานั้น



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ความรู้ที่นักเรียนจะต้องใช้ในการตอบคำถาม คือ

1. การใช้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณในสถานการณ์ต่างๆ รวมถึงการแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา
2. การเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณในสถานการณ์ที่กำหนดให้
3. ความรู้สึกเชิงจำนวนและความรู้สึกเชิงปริภูมิ

ในการแก้โจทย์ปัญหานี้ นอกจากความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องแล้ว นักเรียนจะต้องมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์เปรียบเทียบกราฟที่แสดงอัตราเร็วที่แตกต่างกันโดยเส้นกราฟที่แสดงอัตราเร็วที่มากกว่าจะอยู่เหนือเส้นกราฟที่แสดงอัตราเร็วน้อยกว่า

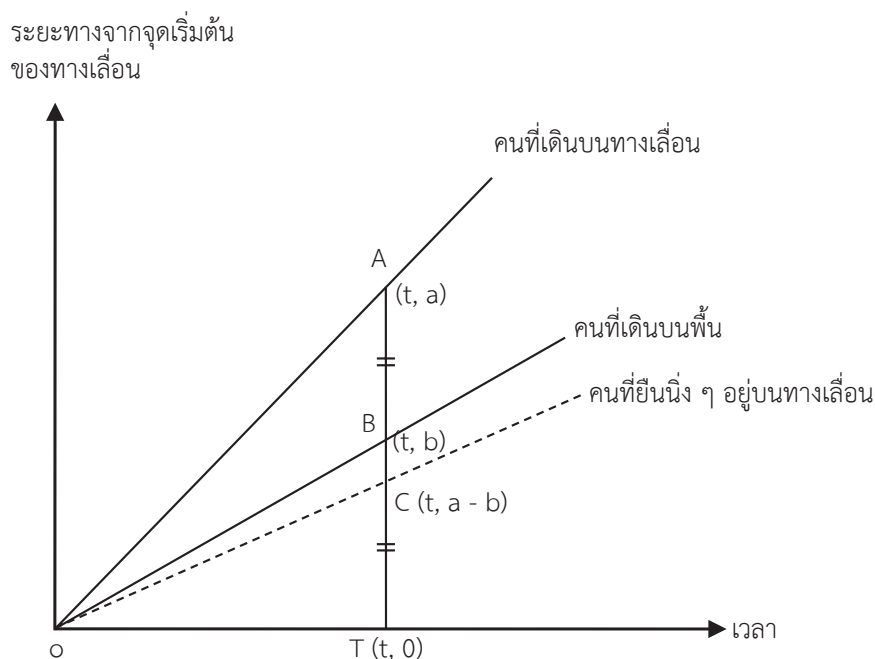


แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

คำถามที่ 1 ตามกราฟข้างบน ถ้าถือว่าคนทั้งสองมีระยะก้าวเท่า ๆ กัน จงเขียนเส้นเพิ่มลงในกราฟข้างบนแสดงระยะทางกับเวลาของคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน

แนวคิด จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาที่กำหนดไว้ในสถานการณ์ โจทย์แสดงให้เห็นว่าในระยะเวลาที่เท่ากัน คนที่เดินบนทางเลื่อนจะได้ระยะทางการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อนมากกว่าคนที่เดินบนพื้นข้างทางเลื่อน ถ้าคนทั้งสองมีระยะก้าวเท่า ๆ กัน ระยะทางที่คนเดินบนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้มากกว่าคนที่เดินบนพื้นข้างทางเลื่อนย่อมได้มาจากการเคลื่อนที่ของทางเลื่อน ซึ่งคนที่ยืนนิ่ง ๆ บนทางเลื่อนก็จะเคลื่อนที่ได้เท่ากับระยะทางในการเคลื่อนที่ของทางเลื่อนนั่นเอง เมื่อคำถามต้องการให้เขียนเส้นเพิ่มลงในกราฟเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของคนที่ยืนนิ่ง ๆ บนทางเลื่อนจึงทำได้ดังนี้

1. กำหนดจุด $T(t, 0)$ แสดงเวลา t นาที ณ จุดใดจุดหนึ่งบนแกนนอนของกราฟ (แกนที่แสดงเวลา)
2. จากจุด $T(t, 0)$ ลากเส้นขนานกับแกนตั้ง (แกนที่แสดงระยะทางจากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อน) ให้ตัดเส้นกราฟ “คนที่เดินบนทางเลื่อน” ที่จุด $A(t, a)$ และตัดเส้นกราฟ “คนที่เดินบนพื้น” ที่จุด $B(t, b)$ โดย $a > b > 0$ ดังรูป



ดังนั้น ในระยะเวลา t จะได้

TA คือระยะทางที่คนเดินบนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้จากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อน ณ เวลา t นาที

TB คือระยะที่คนเดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้จากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อน ณ เวลา t นาที

ถ้าคนที่เดินบนทางเลื่อนและคนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนมีระยะก้าวเท่า ๆ กัน แสดงว่า AB ซึ่งเป็นผลต่างระหว่าง TA กับ TB คือระยะทางที่คนยืนบนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้จากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อนในเวลา t นาที

3. เมื่อต้องการเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน และทราบว่า ณ เวลา t นาที คนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนจะเคลื่อนที่ได้เป็นระยะทาง $a - b$ จึงกำหนดจุด $C(t, a - b)$ บน $\overline{TA}$ ที่ทำให้ $TC = AB$

4. ให้ O แทนจุดเริ่มต้น ลาก $\overline{OC}$ จะได้ $\overline{OC}$ เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางของคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้กับเวลา

ในกรณีนี้ จะสังเกตเห็นว่า “การเดินบนทางเลื่อนที่กำลังเคลื่อนไปจะมีอัตราการเคลื่อนที่มากกว่าการเดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน ในขณะที่การเดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนจะมีอัตราการเคลื่อนที่มากกว่าการยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนที่กำลังเคลื่อนที่ไป” ซึ่งสังเกตได้จากกราฟว่า $AB < TB$ ดังนั้น $TC < TB$ นั่นคือ $\overline{OC}$ อยู่ใต้ $\overline{OB}$ และ $\overline{OB}$ อยู่ใต้ $\overline{OA}$

5. ในทางปฏิบัติ นักเรียนสามารถใช้การวิเคราะห์และกำหนด $\overline{OC}$ ได้ตามแนวของคำตอบที่เฉลยไว้ คือ ยอมรับเส้นที่อยู่ใต้สองเส้นที่ให้มา แต่เส้นนั้นต้องอยู่ใกล้เส้นที่แสดงถึง “คนที่เดินบนพื้น” มากกว่าเส้นแกนนอน ซึ่งไม่จำเป็นต้องแสดงวิธีเขียนกราฟอย่างที่แสดงไว้ข้างต้น คำตอบต้องการเพียงความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของอัตราการเคลื่อนที่ของคนที่ยืนบนทางเลื่อน คนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน และคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน



ข้อสังเกต/ข้อเสนอแนะ

1. การมีประสบการณ์ในการใช้ทางเลื่อน จะช่วยให้เข้าใจได้โดยง่ายว่า สำหรับคนที่มีระยะก้าวเท่า ๆ กันและใช้เวลาในการเดินเท่ากัน คนที่เดินบนทางเลื่อนจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางจากจุดเริ่มต้นมากกว่าคนที่เดินบนพื้นข้างทางเลื่อน โดยระยะทางที่เคลื่อนที่ได้มากกว่านั้นเป็นระยะทางที่ได้จากการเคลื่อนที่ของทางเลื่อน ซึ่งก็คือระยะทางที่คนยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลาที่เท่ากัน สำหรับนักเรียนที่ไม่มีประสบการณ์เกี่ยวกับการใช้ทางเลื่อน อาจเปรียบเทียบให้เห็นความสัมพันธ์ดังกล่าวได้จากสถานการณ์เรื่องการพายเรือตามน้ำ และการพายเรือในน้ำนิ่ง ถ้าคนสองคนมีความสามารถในการพายเรือในน้ำนิ่งได้ระยะทางเท่ากัน เมื่อพายเรือในระยะเวลาที่เท่ากัน คนที่พายเรือตามน้ำจะได้ระยะทางการเคลื่อนที่ของเรือมากกว่าคนที่พายเรือในน้ำนิ่ง ซึ่งระยะทางที่เรือเคลื่อนที่ได้มากกว่านั้นเกิดจากการเคลื่อนที่ของกระแสน้ำที่เรียกกันว่า “อัตราเร็วของกระแสน้ำ” ซึ่งก็คือระยะทางที่เรือเคลื่อนที่ตามน้ำในระยะเวลาหนึ่งโดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พาย สำหรับสถานการณ์เกี่ยวกับการพายเรือและกระแสน้ำมีตัวอย่างอยู่ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่พัฒนาโดย สสวท. เรื่องโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม

2. นักเรียนไทยตอบคำถามได้ถูกต้องเพียง 16.54 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนไทยที่เข้าสอบ นักเรียนจากประเทศจีน ญี่ปุ่น และเกาหลี ก็ตอบคำถามได้ถูกต้องไม่ถึง 50 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนแต่ละชาติที่เข้าสอบ สันนิษฐานว่านักเรียนส่วนใหญ่ทุกชาติไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่า เส้นกราฟที่ต้องการลากควรเป็นอย่างไร จะต้องมีตำแหน่งอยู่ประมาณเท่าใด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนหลายคนไม่มีประสบการณ์ในการใช้ทางเลื่อน ทำให้ไม่สามารถประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการอ่านกราฟและเชื่อมโยงได้ว่า ณ เวลา t ใด ๆ ระยะห่างตามแนวแกนตั้งระหว่างเส้นกราฟของ “คนที่เดินบนทางเลื่อน” กับเส้นกราฟของ “คนที่เดินบนพื้น” คือ ระยะทางที่คนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนเคลื่อนที่ได้จากจุดเริ่มต้นของทางเลื่อนในเวลา t นาที และเมื่อสังเกตจากกราฟ จะเห็นว่า ระยะห่างตามแนวแกนตั้งระหว่างเส้นกราฟทั้งสองน้อยกว่าระยะห่างระหว่างเส้นกราฟ “คนที่เดินบนพื้น” กับแกนนอน แต่จะน้อยกว่ากันไม่มากนัก เส้นกราฟที่เป็นคำตอบจึงเป็นเส้นที่อยู่ใต้เส้นสองเส้นที่ให้มาและอยู่ใกล้เส้นที่แสดงถึง “คนที่เดินบนพื้น” มากกว่าเส้นแกนนอน

3. เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเคลื่อนที่ของคนที่เดินบนทางเลื่อน คนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนและคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน



ครูผู้สอนอาจใช้ข้อมูลเกี่ยวกับอัตราการเคลื่อนที่ของทางเลื่อน เช่น 3 เมตร/นาที และอัตราเร็วในการเดินของคนทั่วไปคือ 5 เมตร/นาที สร้างคำถามที่นำไปสู่ความสัมพันธ์ดังกล่าว และใช้เป็นคำถามในห้องเรียน ดังตัวอย่าง

ถ้า กำหนดให้อัตราการเคลื่อนที่ของทางเลื่อน คือ 3 เมตร/นาที

และอัตราเร็วในการเดินของคน คือ 5 เมตร/นาที

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. คนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนจะมีอัตราการเคลื่อนที่เป็นเท่าใด
[3 เมตร/นาที]
2. คนที่เดินบนทางเลื่อนจะมีอัตราการเคลื่อนที่เป็นเท่าใด
[8 เมตร/นาที]
3. ในเวลา 3 นาที และ t นาที คนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าใด
[9 เมตร และ $3t$ เมตร ตามลำดับ]
4. ในเวลา 3 นาที และ t นาที คนที่เดินบนทางเลื่อนจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าใด
[24 เมตร และ $8t$ เมตร ตามลำดับ]
5. ในเวลา 3 นาที และ t นาที คนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าใด
[15 เมตร และ $5t$ เมตร ตามลำดับ]
6. เมื่ออัตราการเคลื่อนที่ของคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนเป็น 3 เมตร/นาที ถ้า S_1 แทนระยะทางการเคลื่อนที่เป็นเมตรของคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อนในระยะเวลา t นาที S_1 และ t มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และมีกราฟของความสัมพัทธ์เป็นอย่างไร เพราะเหตุใด
[$S_1 = 3t$ และเป็นกราฟเส้นตรง เพราะความสัมพันธ์ระหว่าง S_1 และ t เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปร]

ในกรณีที่นักเรียนไม่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง S_1 และ t ได้ครูผู้สอนควรให้นักเรียนย้อนกลับไปดูคำตอบของคำถามข้อ 3 และใช้คำถามเชื่อมโยงไปยังความรู้เกี่ยวกับอัตราเร็ว ซึ่งมีสูตรในการหา คือ

$$\begin{aligned} \text{อัตราเร็ว} &= \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}} \\ \text{หรือ } \text{ระยะทาง} &= \text{อัตราเร็ว} \times \text{เวลา} \\ \text{จะได้ } S_1 &= 3t \end{aligned}$$



ถ้าหาความสัมพันธ์ระหว่าง S_1 และ t ได้แล้วแต่ไม่ทราบว่ากราฟของความสัมพันธ์เป็นอย่างไร ก็ให้นักเรียนลองเขียนกราฟของความสัมพันธ์ ซึ่งนักเรียนอาจจะตอบคำถามที่เลือกว่ากราฟของความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง เพราะเขียนกราฟของความสัมพันธ์แล้วได้เส้นตรง ก็เป็นคำตอบที่ยอมรับได้ แต่ควรจะถามคำถามให้เชื่อมโยงไปสู่เรื่องกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ซึ่งนักเรียนเคยเรียนมาแล้ว เพื่อให้นักเรียนใช้เป็นเหตุผลในการตอบว่า กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเป็นเส้นตรงโดยไม่ต้องเขียนกราฟ

7. เมื่ออัตราการเคลื่อนที่ของคนที่เดินบนทางเลื่อนเป็น 8 เมตร/นาที ถ้า S_2 แทนระยะทางการเคลื่อนที่เป็นเมตรของคนที่เดินบนทางเลื่อนในระยะเวลา t นาที S_2 และ t มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และมีกราฟของความสัมพันธ์เป็นอย่างไร เพราะเหตุใด [$S_2 = 8t$ และเป็นกราฟเส้นตรง เพราะความสัมพันธ์ระหว่าง S_2 และ t เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปร]

8. เมื่ออัตราการเคลื่อนที่ของคนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนเป็น 5 เมตร/นาที ถ้า S_3 แทนระยะทางการเคลื่อนที่เป็นเมตรของคนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อนในระยะเวลา t นาที S_3 และ t มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และมีกราฟของความสัมพันธ์เป็นอย่างไร เพราะเหตุใด [$S_3 = 5t$ และเป็นกราฟเส้นตรง เพราะความสัมพันธ์ระหว่าง S_3 และ t เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปร]

การตอบคำถามทั้ง 8 ข้อเป็นตัวอย่างการวิเคราะห์สถานการณ์โจทย์ข้างต้นในลักษณะย้อนกลับ เพราะกราฟของความสัมพันธ์ในข้อ 7 และ 8 คือกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาที่แสดงการเปรียบเทียบ “การเดินบนทางเลื่อน” กับ “การเดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน” ซึ่งกำหนดให้ในโจทย์ ส่วนกราฟในข้อ 6 คือ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของ “คนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน” ที่โจทย์ต้องการให้เขียนเส้นเพิ่มลงในกราฟที่โจทย์กำหนดให้ การเชื่อมโยงความรู้จากการตอบคำถามไปสู่สถานการณ์โจทย์จะช่วยให้เด็กเกิดความเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเคลื่อนที่ของคนที่เดินบนทางเลื่อน คนที่เดินบนพื้นที่อยู่ข้างทางเลื่อน และคนที่ยืนนิ่ง ๆ อยู่บนทางเลื่อน ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการตอบคำถามข้อนี้

เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในเรื่องกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลา ที่แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราเร็วที่มีความเกี่ยวข้องเชื่อมโยงกัน



ในลักษณะต่าง ๆ คล้ายกับเรื่องทางเลื่อนข้างต้น ครูผู้สอนอาจใช้สถานการณ์เรื่อง การพายเรือ มาให้นักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์ความสัมพันธ์ดังกล่าว เช่น

สถานการณ์โจทย์

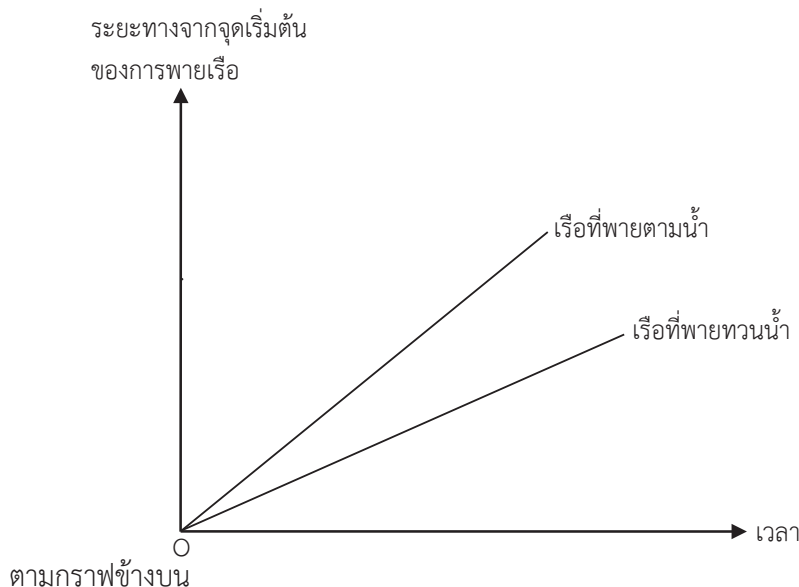
ในการพายเรือ เราทราบว่าอัตราเร็วของกระแสน้ำที่ช่วยให้เรือแล่นได้เร็วขึ้น เมื่อพายเรือตามน้ำ เพราะกระแสน้ำช่วยเพิ่มอัตราเร็วให้เรือ แต่ถ้าพายเรือทวนน้ำ เรือจะแล่นได้ช้าลงเพราะกระแสน้ำต้านเรือ จึงมีข้อสรุปที่เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ว่า

อัตราเร็วของเรือที่พายตามน้ำ เท่ากับ อัตราเร็วของเรือที่พายในน้ำนิ่ง + อัตราเร็ว
ของกระแสน้ำ

อัตราเร็วของเรือที่พายทวนน้ำ เท่ากับ อัตราเร็วของเรือที่พายในน้ำนิ่ง - อัตราเร็ว
ของกระแสน้ำ

ตัวอย่างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาต่อไปนี้

แสดงการเปรียบเทียบระหว่าง “การพายเรือตามน้ำ” กับ “การพายเรือทวนน้ำ” ของคนสองคนที่พายเรือในลำน้ำและเวลาเดียวกัน ด้วยอัตราเร็วของการพายในน้ำนิ่งเท่ากัน



คำถามที่ 1 จงเขียนเส้นเพิ่มลงในกราฟข้างบนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของการพายเรือในน้ำนิ่ง

คำถามที่ 2 จงเขียนเส้นเพิ่มในกราฟข้างบนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของเรือที่ลอยตามน้ำโดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พาย



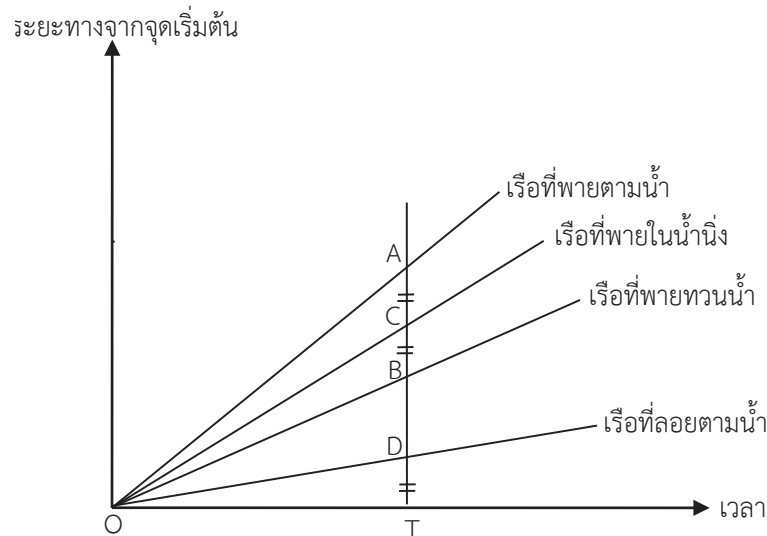
แนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

? คำถามที่ 1 เนื่องจาก

อัตราเร็วของเรือที่พายในน้ำนิ่ง + อัตราเร็วของกระแสน้ำ = อัตราเร็วของเรือที่พายตามน้ำ
 และ อัตราเร็วของเรือที่พายในน้ำนิ่ง - อัตราเร็วของกระแสน้ำ = อัตราเร็วของเรือที่พายทวนน้ำ
 จะได้ อัตราเร็วของเรือที่พายในน้ำนิ่ง = อัตราเร็วของเรือที่พายตามน้ำ - อัตราเร็วของกระแสน้ำ
 หรือ อัตราเร็วของเรือที่พายในน้ำนิ่ง = อัตราเร็วของเรือที่พายทวนน้ำ + อัตราเร็วของกระแสน้ำ
 และ $2 \text{ อัตราเร็วของกระแสน้ำ} = \frac{\text{อัตราเร็วของเรือที่พายตามน้ำ} - \text{อัตราเร็วของเรือที่พายทวนน้ำ}}{2}$
 หรือ อัตราเร็วของกระแสน้ำ = $\frac{\text{อัตราเร็วของเรือที่พายตามน้ำ} - \text{อัตราเร็วของเรือที่พายทวนน้ำ}}{2}$

ดังนั้น เส้นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของการพายเรือในน้ำนิ่ง จึงอยู่ระหว่างเส้นกราฟ “เรือที่พายตามน้ำ” กับ “เรือที่พายทวนน้ำ” โดยมีระยะห่างตามแนวแกนตั้งจากเส้นกราฟทั้งสองเท่ากัน และมีวิธีหาดำแหน่งของเส้นกราฟที่เป็นคำตอบดังนี้

1. กำหนดจุด T ณ จุดใดจุดหนึ่งบนแกนนอน
2. จากจุด T ลากเส้นขนานกับแกนตั้งตัดเส้นกราฟ “เรือที่พายตามน้ำ” ที่จุด A และตัดเส้นกราฟ “เรือที่พายทวนน้ำ” ที่จุด B ดังรูป



3. แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่ C

4. ให้ O เป็นจุดเริ่มต้น ลาก $\overline{OC}$

จะได้ $\overline{OC}$ คือ เส้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของการพายเรือในน้ำนิ่ง



คำถามที่ 2

เนื่องจาก อัตราเร็วของเรือที่ลอยตามน้ำโดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พาย คือ อัตราเร็วของกระแสน้ำ และจากแนวคิดในการหาคำตอบของคำถามที่ 1 ที่ได้ข้อสรุปว่า

$$\text{อัตราเร็วของกระแสน้ำ} = \frac{\text{อัตราเร็วของเรือที่พายตามน้ำ} - \text{อัตราเร็วของเรือที่พายทวนน้ำ}}{2}$$

ดังนั้น เส้นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของเรือที่ลอยตามน้ำโดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พาย จึงมีระยะห่างจากแกนนอนตามแนวแกนตั้งเป็นครึ่งหนึ่งของระยะห่างตามแนวแกนตั้งระหว่างเส้นกราฟ “เรือที่พายตามน้ำ” กับ “เรือที่พายทวนน้ำ” และมีวิธีหาตำแหน่งของเส้นกราฟที่เป็นคำตอบ ดังนี้

กำหนดจุด D บน $\overline{TA}$ ที่ทำให้ $DT = AC$ ลาก $\overline{OD}$

จะได้ $\overline{OD}$ คือ เส้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของเรือที่ลอยตามน้ำโดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พาย

สำหรับคำตอบของนักเรียน อาจไม่ได้แสดงวิธีหาตำแหน่งของเส้นกราฟที่เป็นคำตอบของคำถามที่ 1 และคำถามที่ 2 ตามแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา ถ้านักเรียนลากเส้นกราฟได้ใกล้เคียงกับเส้นกราฟที่ถูกต้องก็เป็นคำตอบที่ยอมรับได้ เพราะแสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างเส้นกราฟทั้ง 4 เส้น แต่ครูควรถามถึงเหตุผลคร่าว ๆ ที่นักเรียนใช้ในการเขียนเส้นกราฟดังกล่าวเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

สำหรับสถานการณ์โจทย์เรื่องการพายเรือ ดังข้างต้น โจทย์จะกำหนดกราฟของความสัมพัทธ์สองเส้นใด ก็จะสามารถวิเคราะห์หากราฟของความสัมพัทธ์อีกสองเส้นที่เหลือได้

ในกรณีที่ครูผู้สอนเห็นว่า นักเรียนยังไม่เข้าใจชัดเจนเกี่ยวกับแนวคิดที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาข้างต้น อาจให้นักเรียนได้ฝึกเขียนกราฟของความสัมพัทธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาในเรื่องการพายเรือ จากสถานการณ์ต่อไปนี้

ถ้าอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งคือ a กิโลเมตร/ชั่วโมง และ อัตราเร็วของกระแสน้ำคือ b กิโลเมตร/ชั่วโมง โดยที่ $a > b > 0$

จงเขียนกราฟของความสัมพัทธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาของเรือที่พายในน้ำนิ่ง เรือที่พายตามน้ำ เรือที่พายทวนน้ำ และเรือที่ลอยตามน้ำโดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พาย บนแกนคู่เดียวกัน

แนวคิดในการเขียนกราฟ

ให้ S_1, S_2, S_3 และ S_4 แทนระยะทางเป็นกิโลเมตรที่เรือเคลื่อนที่ได้ในเวลา t ชั่วโมง สำหรับเรือที่พายในน้ำนิ่ง เรือที่พายตามน้ำ เรือที่พายทวนน้ำ และเรือที่ลอยตามน้ำ โดยคนที่นั่งบนเรือไม่ได้พายตามลำดับ

จะได้ความสัมพันธ์ที่เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือ

$$S_1 = at$$

$$S_2 = (a + b)t$$

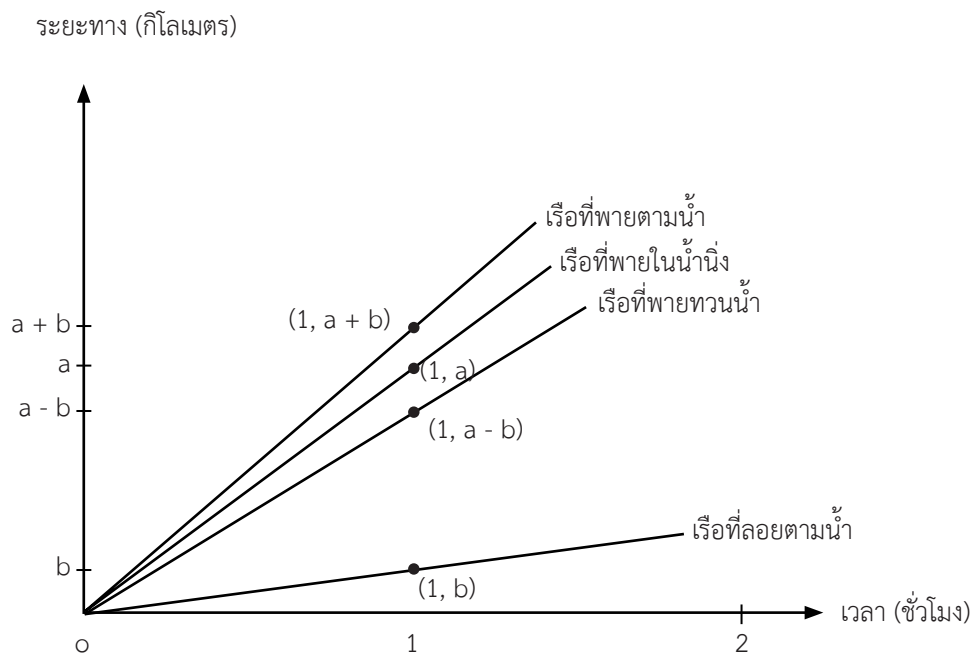
$$S_3 = (a - b)t$$

$$\text{และ } S_4 = bt$$

เขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ข้างต้นเพื่อนำไปเขียนกราฟเส้นตรง ได้ดังนี้

t	0	1	2
S_1	0	a	2a
S_2	0	a + b	2(a + b)
S_3	0	a - b	2(a - b)
S_4	0	b	2b

เขียนกราฟจากตารางความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จะเห็นว่ากราฟที่ได้มีลักษณะของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นกราฟทั้ง 4 เส้น
เช่นเดียวกับกราฟของสถานการณ์โจทย์ข้างต้น

- เลขาธิการสภาการศึกษา, สำนักงาน. (2554). **คู่มือสร้างความรู้ความเข้าใจแก่ผู้บริหาร ครู และนักเรียนเพื่อเตรียมความพร้อมรองรับการประเมินตามโครงการวิจัยนานาชาติ (PISA และ TIMSS)**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : พริกหวานกราฟฟิค.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). **คู่มือครูรายวิชา พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2552). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชา พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2553). **คู่มือครูรายวิชา พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2553). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2553). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

บรรณานุกรม

- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ
เส้นทางสู่ความสำเร็จ**. กรุงเทพมหานคร.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **ตัวอย่างการประเมินผล
นานาชาติ PISA: คณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : อรุณการพิมพ์.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 3.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 3.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 2.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **คู่มือครูรายวิชา
พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑**. พิมพ์ครั้งที่ 1.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **คู่มือครูรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 1.
กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2555). **คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2555). **คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม ๑ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2555). **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : 3-คิว มีเดีย.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2555). **ตัวอย่างการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เล่ม 1**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : 3-คิว มีเดีย.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2556). **ตัวอย่างการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เล่ม 2**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : 3-คิว มีเดีย.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2557). **ตัวอย่างข้อสอบคณิตศาสตร์ PISA 2012**. กรุงเทพมหานคร : วิ.เจ.พรินติ้ง.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2552). **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

คณะผู้จัดทำ

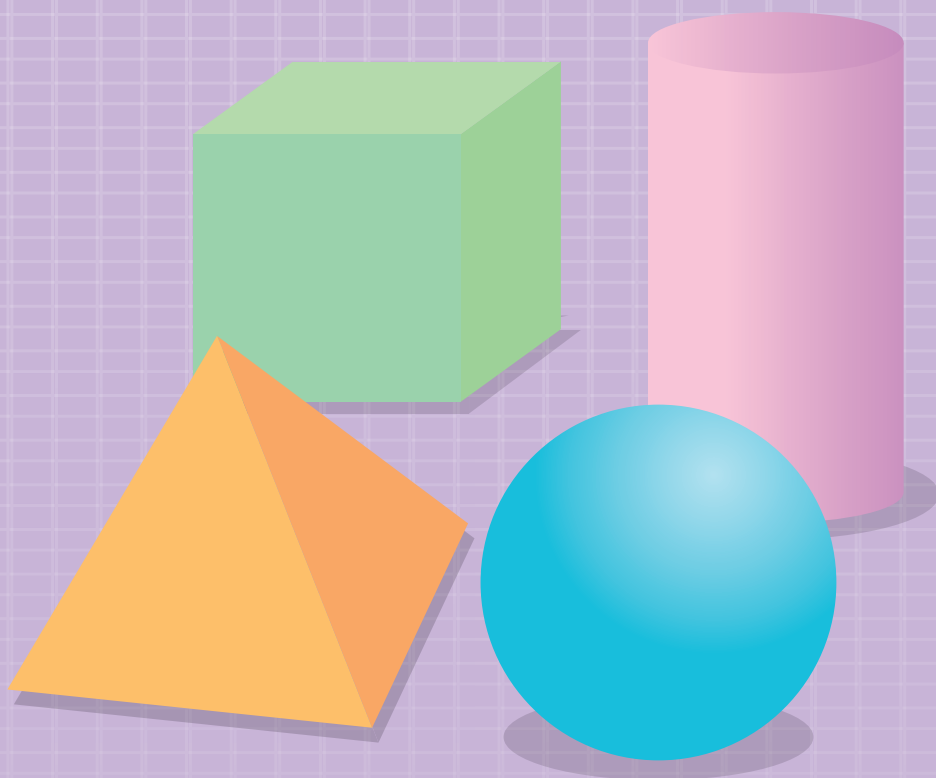
นายสมพล เล็กสกุล
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร
นางสาวอรุณี นาคทัต
นางสาวนวลน้อย เจริญผล
นางสาวจิตรา พินนาพิเชษฐ
นางพจนา สถาพรจนา
นางชุลีพร สุภธีระ
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นางสาวนารี วงศ์สิโรจน์กุล
นางสาวระวี สุวรรณเดโชไชย
นางสาวกรกนก บุญวงศ์

ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
นักวิชาการอิสระ
นักวิชาการอิสระ
นักวิชาการอิสระ
มหาวิทยาลัยมหิดล
มหาวิทยาลัยมหิดล

คณะบรรณาธิการ

นายสมพล เล็กสกุล
นางปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร
นางสาวอรุณี นาคทัต
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน
นางชุลีพร สุภธีระ
นางสาวจารุวรรณ แสงทอง
นายธีระเดช เจียรสุขสกุล
นางสาวจันทร์นภา อุตตะมะ

ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
ข้าราชการบำนาญ
นักวิชาการอิสระ
นักวิชาการอิสระ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

924 ถนนสุขุมวิท แขวงพระโขนง เขตคลองเตย กทม. 10110

โทรศัพท์ Call Center 0-2335-5222, 0-2392-4021 โทรสาร: 0 2381 0750

<http://www.ipst.ac.th>